ОТЪ АВТОРА.

ОСНОВАНІЯ ФИЗИКИ

Профессора Университета Св. Владиміра

Н. Н. ШИЛЛЕРА.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Кинематика, Принципы Динамики, Статика и Кинетика твердаго тѣла.





КІЕВЪ.
Тип. С. В. Кульженко, Ново-Елисаветинская улица, соб. д.
1884.



По опредѣленію Совѣта Университета Св. Владиміра печатать дозволяется.
27 Іюля 1883 года.

И. д. Ректора О. Паульсонъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ ЧАСТИ ПЕРВОЙ.

Введеніе.

Глава I. Ученіе о движеніи (кинематика).

Глава II. Основныя начала ученія о силѣ (принципы динамики).

Глава III. Дѣйствіе силъ на твердыя тѣла (Динамика твердыхъ тѣлъ).

А) Равновѣсіе (статика) твердыхъ тѣлъ.



B) Движеніе твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ приложенныхъ силъ (кинетика твердаго тѣла).

ВВЕДЕНІЕ.

Физика занимается такими явленіями неорганическаго міра, которыя вполнѣ или отчасти могутъ представляться, какъ совокупность извѣстнаго рода движеній. Какъ все то, къ чему мы относимъ названіе тѣла (матеріи), можетъ быть представлено нами не иначе, какъ занимающимъ нѣкоторое пространство, такъ точно явленія въ сущности не могутъ быть иначе мыслимы, какъ въ соотношеніи къ пространству, времени и матеріи, т. е. должны представляться, какъ движенія матеріи. Всякое явленіе мы считаемъ для себя понятнымъ и объясненнымъ, если умѣемъ мысленно разглядѣть въ немъ опредѣленное движеніе. Изученіе явленій есть объясненіе ихъ съ помощію другихъ, болѣе простыхъ, изъ которыхъ простѣйшимъ представляется намъ движеніе. Поэтому основою всѣхъ физическихъ изслѣдованій является разысканіе законовъ того или другаго движенія, или дѣйствительно непосредственно наблюдаемаго, или на основаніи наблюденій опять таки нѣкоторыхъ движеній нами представляемаго. Понятно слѣдовательно, что Механика, наука объ общихъ законахъ движенія матеріальныхъ системъ, должна быть тѣсно связана съ Физикою, и положенія первой науки должны служить исходною точкою для заключеній второй. Однако, хотя предметъ изслѣдованія обѣихъ упомянутыхъ наукъ и есть повидимому одинъ и тотъ-же—движеніе, обѣ онѣ тѣмъ не менѣе никакъ не представляются тождественными, но въ своемъ развитіи и въ своихъ конечныхъ цѣляхъ существенно другъ отъ друга отличаются. Механика изслѣдуетъ воображаемое движеніе, при любыхъ предполагаемыхъ

условіяхъ, которыя въ дѣйствительности могутъ и не наблюдаться. Цѣль Механики установить общіе способы изученія движеній, въ какой-бы формѣ и при какихъ-бы условіяхъ эти послѣднія ни имѣли мѣсто. Поэтому Механика есть наука по преимуществу формальная, строющая свои выводы, какъ Математика, на небольшомъ числѣ основныхъ опредѣленій. Физика изслѣдуетъ условія наблюдаемыхъ существующихъ или предполагаемыхъ существующими движеній, и уже разыскавши упомянутыя условія, дѣлаетъ свои заключенія, основываясь на способахъ Механики. Такимъ образомъ въ основаніи выводовъ Физики лежитъ опытъ и наблюденіе; исходная точка Механики суть опредѣленія. Нѣкоторыми своими областями однако Физика и Механика сливаются въ одну дисциплину. Это имѣетъ мѣсто именно тамъ, гдѣ результаты наблюденій достигаются несложнымъ путемъ, и приводятъ къ одному или нѣсколькимъ простымъ опредѣленіямъ. Въ такомъ случаѣ интересъ физика сосредоточивается не на разысканіи самыхъ условій, но на механическихъ изъ нихъ выводахъ. Такъ напримѣръ, путемъ простыхъ наблюденій мы приходимъ къ заключенію, что твердыя тѣла могутъ быть разсматриваемы въ большинствѣ случаевъ, какъ неизмѣняемыя системы по отношенію къ внѣшнимъ силамъ на нихъ дѣйствующимъ, и затѣмъ, пользуясь выводами Механики, относящимися къ неизмѣняемымъ системамъ, заключаемъ о законахъ равновѣсія и движенія этихъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ силъ. Но строго говоря, и въ этомъ примѣрѣ есть нѣкоторая разница между заключеніями Механики и Физики: выводы первой относительно неизмѣняемой системы абсолютно справедливы, ибо основаны на данномъ опредѣленіи свойствъ системы; выводы второй относительно твердыхъ тѣлъ лишь по стольку вѣрны, по скольку твердое тѣло можно разсматривать, какъ неизмѣняемую систему.

Что касается до основныхъ началъ и теоремъ, относящихся къ законамъ движенія, то они имѣютъ такую-же важность для Физики, какъ и для Механики, и при изложеніи основаній Физики должны быть разсмотрѣны на первомъ мѣстѣ.

Изученіемъ движенія, какъ перемѣны положенія въ пространствѣ неизмѣнныхъ или мѣняющихъ свою форму геометрическихъ комплексовъ, занимается Кинематика, предметъ которой слѣдовательно составляетъ изслѣдованіе соотношеній только между пространствомъ и временемъ, безъ отношенія къ матеріи движущагося тѣла.

Понятіе о движеніи матеріи влечетъ за собою представленіе о силахъ, дѣйствующихъ на матерію и обусловливающихъ ея движеніе. Дѣйствіе силъ на матерію изучаетъ Динамика, въ составъ которой входятъ: Статика, разсматривающая дѣйствіе силъ при условіяхъ равновѣсія, и Кинетика, изучающая вліяніе силъ на движеніе.

Въ силу вышесказаннаго изученіе каждаго физическаго явленія, какъ движенія, разбивается на части кинематическую и динамическую.

ГЛАВА I.

УЧЕНІЕ О ДВИЖЕНІИ (КИНЕМАТИКА).

§ 1. Общее понятіе о положеніи точки въ пространствѣ и его измѣненіи.

Самое простое изъ наблюдаемыхъ нами явленій есть движеніе. Подъ движеніемъ мы разумѣемъ измѣненіе положенія движущагося предмета со временемъ. Движущимся мы можемъ представлять себѣ все, что можетъ имѣть опредѣленное положеніе въ пространствѣ. Поэтому понятіе о движеніи приложимо не только къ матеріальнымъ тѣламъ, но и къ геометрическимъ мѣстамъ, занимаемымъ этими тѣлами. Мы можемъ говорить не только о движеніи физическаго тѣла, но и движеніи геометрическаго тѣла, о движеніи поверхности, линіи, точки.

Мы будемъ сперва разсматривать движеніе точки, какъ самое простое и заключающееся необходимо во всякомъ другомъ движеніи. Чтобы перейти отъ движенія точки къ движенію другихъ геометрическихъ комплексовъ, мы должны разсмотрѣть или движеніе всѣхъ точекъ, составляющихъ упомянутый комплексъ, или перемѣщеніе только его нѣкоторыхъ точекъ. Во всякомъ случаѣ изученіе всякаго движенія сведется къ изученію движенія отдѣльныхъ точекъ.

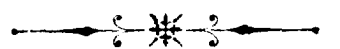
Движеніе точки намъ вполнѣ извѣстно, когда мы знаемъ форму пути, который она описываетъ при своемъ перемѣщеніи, и ту длину, которую движущаяся точка проходитъ по этому пути въ любой промежутокъ времени, при чемъ длина считается отъ даннаго извѣстнаго пункта на пути точки. Путь точки при ея перемѣщеніи называется *траэкторіею точки*. Другими словами можно также сказать, что намъ

тогда извѣстно движеніе точки, когда мы можемъ опредѣлить ея положеніе въ пространствѣ для каждаго момента времени.

Способъ опредѣленія положенія точки въ пространствѣ вытекаетъ изъ самаго понятія о геометрической точкѣ. Первообразное геометрическое представленіе есть представленіе о геометрическомъ тѣлѣ, т. е. о пространствѣ занимаемомъ подлежащими наблюденію физическими тѣлами. Границы, раздѣляющія геометрическія тѣла, мы называемъ поверхностями; границу поверхностей или мѣста ихъ взаимнаго пересѣченія—линіями. Подъ точкою мы подразумѣваемъ мѣсто пересѣченія двухъ какихъ либо линій, или линіи и поверхности, или трехъ поверхностей.Такимъ образомъ представленіе о положеніи точки во всякомъ случаѣ вытекаетъ изъ представленія о нѣкоторыхъ пересѣкающихся поверхностяхъ, число которыхъ должно быть по крайней мѣрѣ три.



Примѣчаніе. Вышеупомянутое опредѣленіе положенія движущейся точки данною ея траэкторіею и длиною пройденнаго пути сводится точно также къ опредѣленію съ помощію пересѣкающихся данныхъ поверхностей. Дѣйствительно, траэкторія (вообще нѣкоторая кривая линія) опредѣляется пересѣченіемъ двухъ данныхъ поверхностей. Что-же касается до длины, отмѣриваемой вдоль по траэкторіи для нахожденія на ней положенія движущейся точки въ данный моментъ времени, то это отмѣриваніе можетъ быть произведено непосредственно только въ случаѣ прямой линіи. Отложить-же данную длину вдоль по кривой линіи (напр. по кругу) мы не можемъ съ помощію непосредственнаго совмѣщенія прямой, представляющей данную единицу длины, и измѣряемой кривой. Мы должны при этомъ вычислить, между какими двумя точками кривая будетъ имѣть данную длину; эти точки опредѣлятся, какъ пересѣченія данной кривой съ какими нибудь поверхностями.



Въ большинствѣ случаевъ представляется наиболѣе удобнымъ опредѣлять точку, какъ пересѣченіе трехъ плоскостей, проведенныхъ на извѣстныхъ разстояніяхъ отъ трехъ заранѣе данныхъ и опредѣленныхъ плоскостей, и параллельно этимъ послѣднимъ. Упомянутыя данныя плоскости, относительно которыхъ опредѣляется положеніе какой нибудь точки, называются плоскостями координатъ, и притомъ — прямоугольныхъ, когда плоскости взаимно перпен-

дикулярны, и—косоугольныхъ, когда плоскости пересѣкаютъ другъ друга подъ косыми углами. На рисункѣ мы видимъ плоскости XYZ косоугольныхъ и $X'Y'Z'$ прямоугольныхъ координатъ, пересѣкающіяся другъ съ другомъ по линіямъ OX, OY, OZ, OX', OY', OZ', которыя называются косоугольными или прямоугольными осями координатъ. Точка пересѣченія осей координатъ O называется началомъ координатъ *).

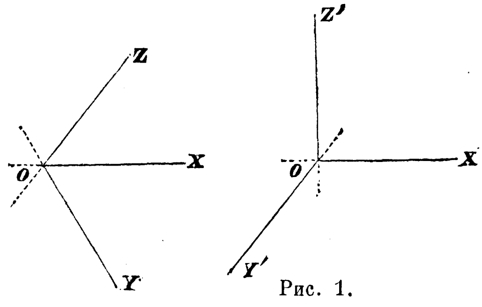


Рис. 1.

На оси OX отложимъ длину $Ox = a$ (рис. 2) и проведемъ черезъ точку x плоскость, параллельную плоскости YOZ; на оси OY отложимъ длину $Oy = b$ и проведемъ черезъ точку y плоскость, параллельную плоскости ZOX; точно также на разстояніи $Oz = c$ по оси OZ проведемъ плоскость, параллельную плоскости XOY. Пересѣченіе упомянутыхъ трехъ плоскостей, данныхъ тремя разстояніями a, b, c, опредѣлитъ положеніе нѣкоторой точки A, которая можетъ быть разсматриваема, какъ вершина угла параллелепипеда (косоугольнаго или прямоугольнаго), ребра котораго суть a, b, c. Эти длины, опредѣляющія вполнѣ положеніе точки A относительно трехъ данныхъ плоскостей, называются координатами точки A и обозначаются вообще буквами x, y, z, соотвѣтственно тѣмъ осямъ, по которымъ онѣ откладываются. Способъ опредѣленія положенія точки съ помощію координатъ вытекаетъ непосредственно изъ нашего представленія о геометрической точкѣ. Чтобы представить себѣ точку мы должны вообразить тѣ части какой либо линіи, которыя она другъ отъ друга отдѣляетъ; но самая линія можетъ намъ представляться не иначе, какъ границей между нѣкоторыми поверхностями, которыя въ свою очередь должны ограничивать какое нибудь тѣло. Слѣдовательно точка является намъ, какъ аттрибутъ, связанный съ первообразнымъ представленіемъ о геометрическомъ тѣлѣ. Чтобы указать на точку, мы

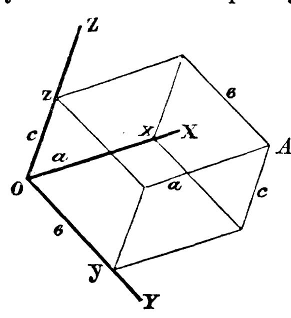


Рис. 2.

*) На рисункѣ 1 линіи OX и OZ соотвѣтственно OX' и OZ' лежатъ въ плоскости рисунка, линіи OY и OY' выходятъ изъ плоскости рисунка, и кромѣ того OY' къ этой послѣдней перпендикулярна.

должны прежде всего указать на нѣкоторое тѣло, съ опредѣленною пограничною поверхностію; за тѣмъ—на части этой поверхности; наконецъ—на части границъ между поверхностями, т. е. части линіи, которыя и отдѣляются другъ отъ друга точкою. Употребляя координаты тѣмъ способомъ, какъ было указано выше, мы для опредѣленія точки представляемъ себѣ нѣкоторое тѣло въ видѣ параллелепипеда, одна изъ вершинъ угловъ котораго указываетъ намъ на опредѣленную геометрическую точку. Измѣняя мысленно размѣры параллелепипеда, мы попадаемъ упомянутою вершиною въ различныя мѣста пространства и указываемъ на различныя точки. И такъ, обозначеніе $x=a$ представляетъ, что вдоль по оси OX (или оси x—овъ) должна быть отложена длина a и проведена плоскость, параллельная YOZ; точно также $y=b$ относится къ длинѣ, откладываемой по оси OY и къ плоскости, параллельной ZOX, и т. д. Три уравненія

$$x=a\,,\qquad y=b\,,\qquad x=c$$

опредѣляютъ точку.

Одно уравненіе

$$x=a\,,$$

какъ мы видѣли, соотвѣтствуетъ плоскости, параллельной YOZ. Дѣйствительно, оно опредѣляетъ всѣ точки, которыя отстоятъ по оси x—овъ на длину a отъ плоскости YOZ; а такія точки принадлежатъ плоскости.

Два уравненія

$$x=a\,,\qquad y=b$$

опредѣляютъ точки, принадлежащія двумъ плоскостямъ,

одной $x=a$ и другой $y=b$,

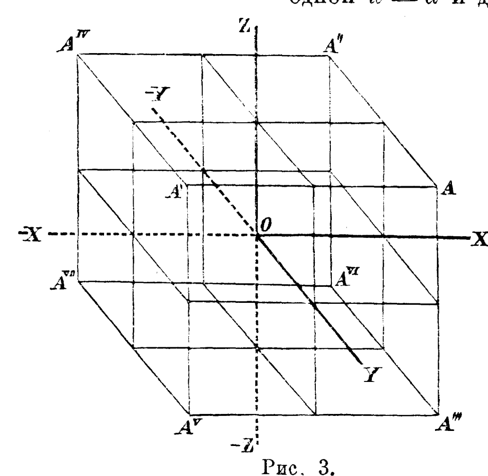


Рис. 3.

слѣдовательно представляютъ линію пересѣченія двухъ плоскостей параллельныхъ YOX и XOZ.

Наконецъ три уравненія опредѣлятъ точку принадлежащую тремъ плоскостямъ, т. е. единственно точку ихъ пересѣченія.

Такимъ образомъ различныя величины координатъ x, y, z опредѣляютъ различныя точки, лежащія въ трегранномъ углѣ XYZ (рис. 3). Точки, лежащія

въ остальныхъ смежныхъ съ первымъ трегранныхъ углахъ, сходящихся въ вершинѣ O, опредѣляются длинами, окладываемыми вдоль по линіямъ OX, OY, OZ въ противоположныя стороны и считающимися тогда отрицательными. Такъ напримѣръ, точка A' опредѣляется координатами

$$x = -a, \quad y = b, \quad z = c,$$

или

$$-x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

точка A''—координатами

$$x = a, \quad y = -b, \quad z = c$$

точка A'''

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -c,$$

точка A^{IV}

$$x = -a, \quad y = -b, \quad z = c$$

точка A^{V}

$$x = -a, \quad y = b, \quad z = -c,$$

точка A^{VI}

$$x = a, \quad y = -b, \quad z = -c,$$

точка A^{VII}

$$x = -a, \quad y = -b, \quad z = -c.$$

Если координаты точки остаются однѣ и тѣже для всякаго времени, то мы заключаемъ, что точка остается въ покоѣ относительно данныхъ плоскостей координатъ. Если обратное имѣетъ мѣсто, то мы заключаемъ, что точка измѣняетъ свое положеніе относительно плоскостей координатъ, т. е. *движется*. Если мы будемъ знать координаты точки для каждаго момента времени, то будемъ имѣть возможность во всякое время найти положеніе точки въ пространствѣ, т. е. *будемъ знать движеніе точки*.

Умѣть опредѣлить координаты движущейся точки для всякаго времени значитъ умѣть выразить формулою зависимость между длиною координаты и временемъ или, какъ выражаютъ короче, представить координату, какъ *функцію времени*. Напримѣръ, уравненія

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = ct,$$

выражаютъ, что во все время движенія координаты точки, отсчитываемыя по осямъ x—овъ и y—овъ, суть нули, т. е. что точка движется вдоль по оси z—овъ, и при томъ такъ, что длины ею про-

ходимыя, пропорціональны временамъ. Время обыкновенно считается отъ начала движенія. Въ приведенномъ примѣрѣ видно, что при началѣ движенія, т. е. при $t = 0$, точка находилась въ самомъ началѣ координатъ. Точно также уравненія

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = bt^3$$

показываютъ, что точка движется изъ начала координатъ по оси z—овъ такъ, что проходимое ею пространство ростетъ пропорціонально кубамъ временъ.

Уравненія

$$x = bt, \quad y = ct, \quad z = 0$$

показываютъ, что во все время движенія точка не выходитъ изъ плоскости XY, и что обѣ координаты ея въ этой плоскости возрастаютъ пропорціонально времени. Предположимъ, что плоскость рисунка (рис. 4) совпадаетъ съ плоскостію XY. Выбирая рядъ моментовъ времени t_1, t_2, t_3, мы можемъ опредѣлить обѣ координаты для каждаго изъ этихъ моментовъ; называя эти координаты, соотвѣтственно первому, второму и т. д. моментамъ, черезъ y_1, x_1, x_2, y_2, и т. д., мы будемъ имѣть на основаніи предыдущихъ уравненій разсматриваемаго движенія:

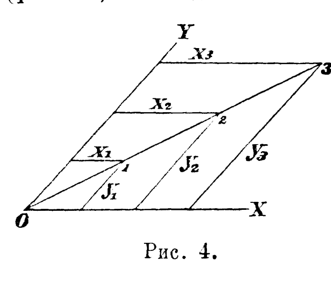


Рис. 4.

$$x_1 = bt_1, \quad x_2 = bt_2, \quad x_3 = bt_3,$$
$$y_1 = ct_1, \quad y_2 = ct_2, \quad y_3 = ct_3.$$

Выбирая достаточно много такихъ моментовъ времени, въ достаточно малыхъ промежуткахъ другъ отъ друга, мы получимъ цѣлый рядъ положеній движущейся точки, 1, 2, 3 и т. д., соединяя которыя непрерывною линіею, получимъ траэкторію точки, т. е. ея путь. Въ данномъ примѣрѣ путь точки характеризуется тѣмъ, что

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3},$$

какъ это видно изъ предыдущихъ уравненій. Такая пропорціональность возможна только тогда, когда путь 1, 2, 3 представляетъ прямую линію.

Точно также легко обнаружить, что уравненія

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct$$

представляютъ движеніе по прямой линіи, проходящей черезъ начало координатъ и не совпадающей ни съ одною изъ плоскостей координатъ.

Вообще, когда мы, произведя надъ одною величиною p конечное или безконечное число дѣйствій (какъ-то: сложеніе, умноженіе, возведеніе въ степень и т. д.), получаемъ другую величину q, то сокращенно обозначаемъ подобную зависимость между двумя величинами p и q такимъ образомъ:

$$q = f(p),$$

и говоримъ, что q есть ф у н к ц і я отъ p, т. е. что вообще q зависитъ отъ p: если мы будемъ мѣнять величины p, то вслѣдствіе этого измѣнится и величина q. Такъ, площадь круга есть функція его радіуса; объемъ прямоугольной призмы есть функція ея длины, ширины и высоты, и т. п. Различнымъ рядамъ дѣйствій надъ величинами соотвѣтствуютъ различныя обозначенія для функцій: f_1, f_2, F, F', φ, ψ и т. п. Такъ, обозначенія

$$u = f_1(p), \quad v = f_2(q), \quad w = f_3(r, s)$$

показываютъ, что u зависитъ отъ p, v — отъ q, w — отъ r и s, но что всѣ эти зависимости различныя.

Положеніе, что движеніе точки мы считаемъ извѣстнымъ, когда можемъ опредѣлить ея мѣсто въ пространствѣ для каждаго момента времени, можно на основаніи вышеизложеннаго выразить сокращенно такимъ образомъ: движеніе точки дается уравненіями

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{1}$$

Аналитическая Геометрія учитъ насъ, какъ по виду этихъ уравненій заключать о формѣ пути, проходимаго движущеюся точкою.

Примѣчаніе. Форма пути опредѣляется такимъ образомъ. Изъ одного какого нибудь изъ трехъ уравненій движенія опредѣлимъ t, т. е. рѣшимъ, положимъ, уравненіе

$$z = f_3(t)$$

относительно t, какъ неизвѣстнаго. Получимъ вообще:

$$t = \varphi(z).$$

Опредѣленное такимъ образомъ t подставимъ въ каждое изъ двухъ остальныхъ уравненій движенія. Получимъ вообще:

$$x = F_1(z), \quad y = F_2(z),$$

т. е. опредѣлимъ координаты точки x и y въ зависимости отъ координаты z, исключивъ время. Разсмотримъ теперь геометрическое значеніе этихъ двухъ уравненій. Если мы въ этихъ уравненіяхъ будемъ полагать z равнымъ послѣдовательно ряду совершенно произвольныхъ, но опредѣленныхъ величинъ z_1, z_2, z_3, z_4 и т. д., то соотвѣтственно можемъ вычислить ряды величинъ (уже не произвольныхъ) для x и y:

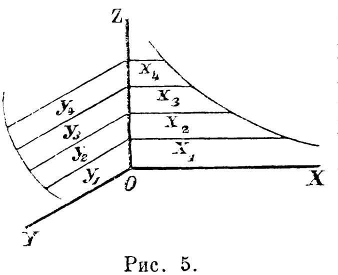


Рис. 5.

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad (\text{гдѣ } x_1 = F_1(z_1), \quad \text{и т. д.}),$$

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad (\text{гдѣ } y_1 = F_2(z_1), \quad \text{и т. д}).$$

Такимъ образомъ получимъ (рис. 5) рядъ точекъ въ плоскости XZ, координаты которыхъ будутъ z_1 и x_1, z_2 и x_2, и т. д., и рядъ точекъ въ плоскости YZ, координаты которыхъ будутъ z_1 и y_1, z_2 и y_2 и т. д. Если число выбранныхъ произвольныхъ значеній z достаточно велико (а оно можетъ быть какъ угодно велико), то мы получимъ въ той и другой плоскости непрерывный рядъ точекъ, которыя образуютъ тамъ и сямъ нѣкоторыя кривыя линіи.

Такимъ образомъ можно сказать, что уравненія

$$x = F_1(z) \text{ и } x = F_2(z),$$

каждое отдѣльно для своей плоскости координатъ, представляютъ нѣкоторыя кривыя линіи. Разсматривая точки, опредѣляемыя только однимъ уравненіемъ $x = F_1(z)$, только въ плоскости XZ, мы тѣмъ самымъ даемъ координатѣ y опредѣленное значеніе; именно, выбираемъ $y = 0$; между тѣмъ какъ уравненіе $x = F_1(z)$ показываетъ, что, для какой нибудь произвольно выбранной величины z, величина координаты x не можетъ быть произвольною, но должна быть вычислена изъ даннаго уравненія; величина-же координаты y можетъ быть какая угодно. Но давать координатѣ y какія угодно значенія значитъ разсматривать точки, лежащія въ какихъ угодно плоскостяхъ, параллельныхъ плоскости XZ. Слѣдовательно, если мы проведемъ какую угодно плоскость, параллельную плоскости XZ, и въ ней вообразимъ такую-же кривую линію, какая была нами опредѣлена прежде въ плоскости XZ, то координаты каждой точки этой кривой очевидно удовлетворятъ тоже уравненію $x = F_1(z)$. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что вообще въ пространствѣ уравненіе $x = F_1(z)$ предста-

вляетъ цилиндрическую поверхность (т. е. удовлетворяется координатами точекъ цилиндрической поверхности), которая образуется движеніемъ параллельно оси y — овъ нѣкоторой линіи (кривой или прямой), представляемой уравненіемъ $x = F_1(z)$ для любой изъ плоскостей параллельныхъ плоскости XZ. Точно также отдѣльно взятое уравненіе $y = F_2(z)$ вообще представляетъ цилиндрическую поверхность, которой образующая параллельна оси x — овъ, а директриса опредѣляется уравненіемъ $y = F_2(z)$, въ любой изъ плоскостей параллельныхъ плоскости YZ. Теперь понятно, что точки, координаты которыхъ опредѣляются заразъ обоими уравненіями

$$x = F_1(z) \quad \text{и} \quad y = F_2(z),$$

будутъ принадлежать и той и другой цилиндрической поверхности, т. е. линіи пересѣченія обоихъ выше упомянутыхъ цилиндровъ. Эта линія, опредѣляемая двумя уравненіями между тремя координатами, и будетъ очевидно траэкторіей движущейся точки, ибо координаты x, y, z, опредѣляющія положеніе движущейся точки, въ тоже самое время принадлежатъ точкамъ упомянутой кривой.

Если найдены два уравненія кривой, то кривая вполнѣ опредѣлена, ибо мы можемъ ее построить точка за точкою, давая координатѣ z рядъ произвольныхъ значеній и вычисляя потомъ по даннымъ двумъ уравненіямъ соотвѣтствующія координаты x и y.

Пусть напримѣръ будутъ даны такія уравненія движенія:

$$x = at^n, \quad y = bt^n, \quad z = ct^n;$$

тогда уравненія траэкторіи будутъ

$$x = \frac{a}{c} z, \quad y = \frac{b}{c} z.$$

Каждое изъ этихъ уравненій, въ своей соотвѣтствующей плоскости, представляетъ прямую линію, ибо координаты точекъ, принадлежащихъ линіи, находятся, какъ показываютъ уравненія, въ постоянномъ отношеніи другъ къ другу. Въ пространствѣ оба уравненія, каждое отдѣльно, представятъ поверхности, слѣды которыхъ на плоскости XZ или YZ суть прямыя линіи. Первая поверхность образуется движеніемъ по прямой линіи $x = \frac{a}{c} z$ другой прямой параллельной оси y—въ, и есть слѣдовательно плоскость; вторая поверхность есть тоже плоскость; пересѣченіе ихъ, т. е. траэкторія точки, есть прямая линія, которая проходитъ черезъ начало координатъ, ибо ея уравненія удовлетво-

ряются тождественно координатами начала, т. е. величинами $x=0$, $y=0$, $z=0$. Предположимъ, что оси координатъ прямоугольныя, и опредѣлимъ длину пути, проходимую точкою въ разныя времена по ея траэкторіи. Пусть (рис. 6) Os будетъ прямолинейный путь точки, s—ея положеніе на пути для момента времени t, x, y, z—ея координаты въ этомъ положеніи. Тогда очевидно

$$Os^2 = x^2 + y^2 + z^2 ,$$

и изъ уравненій движенія:

$$Os^2 = a^2t^{2n} + b^2t^{2n} + c^2t^{2n} ,$$

Рис. 6.

откуда

$$Os = t^n \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} ,$$

т. е. длина пути пропорціональна n—ной степени времени.

Уравненія (1), опредѣляющія движеніе точки относительно данныхъ плоскостей координатъ, будучи разсматриваемы каждое отдѣльно, представляютъ движеніе трехъ точекъ по соотвѣтственнымъ осямъ координатъ. Дѣйствительно одно уравненіе

$$x = f_1(t)$$

показываетъ, что нѣкоторая точка движется по оси x—въ, при чемъ длина пути, проходимаго этою точкою по ея прямолинейной траэкторіи, выражается въ зависимости отъ времени функціею $f_1(t)$. Точно также одно уравненіе $y = f_2(t)$ выражаетъ движеніе другой точки по оси y—въ. Подобное же скажемъ относительно третьяго уравненія $z=f_3(t)$. Эти три точки называются проложеніями движущейся точки на оси координатъ. Изъ предъидущаго очевидно, что если мы знаемъ движеніе по осямъ координатъ проложеній на нихъ движущейся точки, то слѣдовательно знаемъ движеніе самой точки. Движеніе проложенія точки по соотвѣтствующей оси называется короче просто движеніемъ точки относительно или по соотвѣтствующей оси координатъ.

Слѣдовательно мы можемъ сказать, что движеніе точки намъ извѣстно, когда мы знаемъ ея движеніе по тремъ какимъ нибудь прямымъ линіямъ, не лежащимъ въ одной плоскости и не параллельнымъ другъ другу (которыя и будутъ осями координатъ).

Такимъ образомъ, всякое движеніе точки мы можемъ представить себѣ разложеннымъ на три прямолинейныя движенія. Возможность такого разложенія вытекаетъ очевидно изъ нашего способа представлять себѣ положеніе точки и ея движеніе. Каждое изъ вышеупомянутыхъ трехъ прямолинейныхъ движеній можетъ быть разложено въ свою очередь опять на три и т. д.

§ 2. Скорость.

Самый простой случай движенія точки, какой только мы можемъ себѣ представить, будетъ тогда, когда точка движется по прямой линіи, проходя въ равные и произвольно выбранные промежутки времени одинаковыя длины пути. Такого рода движеніе называется прямолинейнымъ равномѣрнымъ.

Если точка движется по кривой линіи, но проходя одинаковыя пространства въ равныя и произвольной величины промежутки времени, то движеніе называется криволинейнымъ равномѣрнымъ.

И въ томъ, и въ другомъ случаѣ, на оборотъ, равные и произвольно выбранные промежутки пути будутъ проходиться очевидно въ равныя времена.

Если точка движется прямолинейно и равномѣрно, то ея проложенія, косоугольныя или прямоугольныя, на какой угодно прямой движутся тоже равномѣрно. Дѣйствительно, пусть точка движется по AB (рис. 7) и въ равныя времена проходитъ равные промежутки пути Aa, ab, bc и т. д. Если линія aa' опредѣляетъ ея проложеніе на линію $A'B'$ въ положеніи a, то линіи bb' cc' и т. д., параллельныя первой, опредѣлятъ проложенія движущейся точки на линію $A'B'$ въ положеніяхъ b, c и т. д. Такъ какъ отрѣзки $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ и т. д. 1) равны между собою, 2) могутъ быть выбраны произвольной величины и 3) проходятся въ равныя времена, то движеніе по $A'B'$ есть равномѣрное.

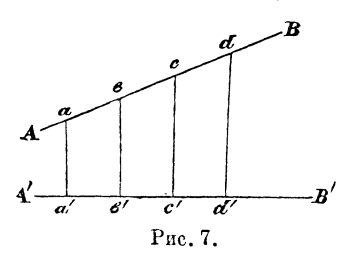


Рис. 7.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ на оборотъ, что если точка движется равномѣрно по тремъ линіямъ не лежащимъ

въ одной плоскости, то движеніе ея въ пространствѣ есть прямолинейное и равномѣрное, ибо (§ 1) тремя движеніями по такимъ линіямъ движеніе точки вполнѣ опредѣляется.

Пространство, проходимое точкою равномѣрно въ единицу времени, называется скоростію.

Если слѣдовательно мы обозначимъ черезъ s длину пути, пройденнаго точкою равномѣрно, черезъ t—время, въ продолженіи котораго эта длина пройдена, и черезъ v—скорость, то на основаніи вышеприведеннаго опредѣленія

$$v = \frac{s}{t} , \tag{2}$$

откуда на оборотъ, если извѣстны v и t или v и s, то

$$s = vt \text{ и } t = \frac{s}{v} . \tag{3}$$

Мы видимъ, что число, представляющее величину скорости, получается отъ дѣленія числа наименованія длины на число наименованія времени. Въ результатѣ получается число новаго наименованія, отличнаго отъ длины и времени. Единица этого новаго наименованія не имѣетъ спеціальнаго названія. Но такъ какъ очевидно $v = 1$, когда s=един. длины, и t=един. времени, то для обозначенія единицы скорости мы можемъ усвоить такой способъ:

$$\text{ед. скорости} = \frac{\text{ед. длины}}{\text{ед. времени}} . \tag{4}$$

За единицу длины принимается обыкновенно центиметръ, т. е. сотая часть метра, который въ свою очередь представляетъ разстояніе между концами платиновой линейки (при температурѣ тающаго льда), сдѣланной въ 1795 г. французскимъ механикомъ Борда (Borda) и хранящейся въ Парижѣ. Въ свое время метръ долженъ былъ представлять одну десятимилліонную $\left(\frac{1}{10^7}\right)$ часть четверти земнаго меридіана, согласно геодезическимъ измѣреніямъ Деламбра (Delambre). Познѣйшія, болѣе точныя геодезическія измѣренія показали, что метръ, сохраняемый въ Парижѣ, нѣсколько меньше приписываемой ему величины; а именно, средняя длина четверти земнаго меридіана представляется не въ 10^7 метровъ, а въ

10007400 метровъ *).

---

*) Ererett. Units and Physical Constants. § 70.

Такимъ образомъ, основаніемъ метрической системы мѣръ служитъ не размѣръ земли, а длина линейки, сдѣланной Борда.

За единицу времени принимается секунда средняго времени, т. е. $\frac{1}{24 \times 60 \times 60}$ часть среднихъ сутокъ, причемъ подъ средними сутками подразумѣвается средняя годичная величина промежутка времени между двумя послѣдовательными прохожденіями солнца черезъ меридіанъ.

На основаніи вышеприведеннаго опредѣленія единицъ времени и длины, и на основаніи (4), мы будемъ имѣть:

$$\text{единиц. скорости} = \frac{\text{цент.}}{\text{секунд.}} \,. \tag{5}$$

Слѣдовательно, если v будетъ численная величина скорости, то полное ея обозначеніе будетъ $v\,\frac{\text{цент.}}{\text{сек.}}$.

Графически скорость представляется прямою линіею по величинѣ и по направленію. Направленіе прямой AB (рис. 8) совпадаетъ съ направленіемъ скорости, и длина ея заключаетъ въ себѣ столько единицъ длины, т. е. центиметровъ, сколько изображаемая ею скорость содержитъ единицъ скоростей, т. е. $\frac{\text{цент.}}{\text{сек.}}$. Точка A, отъ которой откладывается данная скорость AB, называется точкою приложенія данной скорости. Смыслъ такого графическаго представленія состоитъ въ томъ, что движущаяся точка, исходя изъ A, имѣетъ скорость AB, т. е. двигаясь дальше въ направленіи AB, пройдетъ въ одну секунду длину пути AB. При этомъ однако не подразумѣвается, что точка дѣйствительно при своемъ движеніи проходитъ всю длину AB: она ее пройдетъ, когда будетъ двигаться равномѣрно въ теченіи единицы времени; но въ дѣйствительности она можетъ двигаться только въ продолженіи какой нибудь какъ угодно малой доли секунды; скорость же въ теченіи этого краткаго срока движенія все таки выразится линіею AB, которая относится къ движенію, имѣющему продолжаться цѣлую секунду.

B
A
Рис. 8.

§ 3. Скорость перемѣннаго движенія.

Всякое движеніе, не удовлетворяющее условію равномѣрности, называется перемѣннымъ. Непрерывный рядъ равномѣрныхъ движеній, имѣющихъ каждое свою отличную отъ другихъ скорость, представитъ намъ въ совокупности одинъ изъ видовъ перемѣннаго движенія, при которомъ скорость точки не остается одна и таже, но перемѣняется. Если мы представимъ себѣ каждый изъ промежутковъ пути, на которомъ точка движется равномѣрно, съ особою для каждаго промежутка скоростію, безконечно малымъ, то получимъ общій типъ перемѣннаго движенія, при которомъ скорость измѣняется непрерывно, т. е. безконечно малыми скачками. Другими словами, мы можемъ себѣ представить непрерывно перемѣнное движеніе, какъ составленное изъ послѣдовательнаго ряда безчисленнаго множества равномѣрныхъ движеній, обладающихъ каждое своею особою скоростію.

Къ тому же представленію перемѣннаго движенія мы можемъ прійти другимъ способомъ. Предположимъ, что точка движется по нѣкоторой кривой отъ A къ B, и что ея движеніе не равномѣрное. Если мы раздѣлимъ путь AB (рис. 9) на произвольное число отрѣзковъ Ab, bc, cd и т. д., проходимыхъ, положимъ, въ равныя времена, то длина этихъ отрѣзковъ вообще будетъ различная. Точки A и b, b и c, c и d

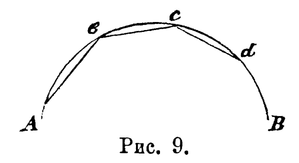


Рис. 9.

и т. д. послѣдовательно соединимъ прямыми линіями, длины которыхъ будутъ вообще различны; затѣмъ представимъ себѣ нѣкоторую движущуюся точку, которая, пробѣгая послѣдовательно колѣна ломаной линіи $Abcd$..., проходитъ по каждому изъ нихъ равномѣрно въ теченіи того же самаго времени, въ которое точка, движущаяся по кривой, проходитъ дугу кривой, стянутую соотвѣтственною прямою. Обѣ движущіяся точки, на своихъ отличныхъ одинъ отъ другаго путяхъ между A и B, будутъ очевидно приходить одновременно въ положенія A, b, c, d... B, между которыми будутъ вообще двигаться то опережая одна другую, то другъ отъ друга отставая. Увеличивая число колѣнъ ломаной линіи, мы тѣмъ увеличимъ и число точекъ, въ которыхъ оба описанныя движенія совпадутъ другъ съ другомъ. Представивъ себѣ число проведенныхъ вышеописаннымъ способомъ колѣнъ ломаной линіи безконечно большимъ, (т. е. больше всякой данной величины), а длины колѣнъ—слѣдовательно безконечно малыми

(т. е. меньше всякой данной величины), мы заставимъ данное перемѣнное криволинейное движеніе совпадать въ безконечно большомъ числѣ точекъ съ движеніемъ, составленнымъ изъ безчисленнаго множества равномѣрныхъ прямолинейныхъ движеній. Но сказать, что два движенія совпадаютъ другъ съ другомъ въ безчисленномъ множествѣ промежутковъ по пространству и времени—значитъ утверждать, что оба движенія совпадаютъ вполнѣ, и совершенно одинаковы.

Итакъ, всякое движеніе въ его безконечно малыхъ частяхъ мы представляемъ себѣ, какъ равномѣрное и прямолинейное.

Скорость перемѣннаго движенія есть слѣдовательно скорость тѣхъ равномѣрныхъ движеній, на которыя движеніе въ своихъ элементахъ распадается. Для различныхъ элементовъ пути эта скорость будетъ различная. Если точка, пройдя данный элементъ своего пути, будетъ продолжать двигаться далѣе, не измѣняя своей скорости ни по величинѣ, ни по направленію, то длина пути, которую она пройдетъ при этихъ условіяхъ въ единицу времени, и будетъ ея скоростію въ данномъ элементѣ пути или въ данной точкѣ пути.

Пусть ds *) будетъ длина безконечно малаго элемента пути, проходимаго точкою равномѣрно; пусть dt будетъ безконечно малое время, въ продолженіи котораго эта длина проходится. Это время должно быть безконечно малымъ, если движеніе существуетъ, т. е. наблюдается, ибо въ противномъ случаѣ, еслибъ оно было конечное (т. е. не безконечно малое), то мы имѣли бы въ результатѣ, что точка должна проходить конечное пространство, состоящее изъ безконечнаго множества частей ds, въ продолженіе безконечнаго же множества конечныхъ промежутковъ времени, т. е. въ продолженіи безконечнаго времени; другими словами, точка не перемѣщалась бы замѣтно въ любой конечный промежутокъ времени, или находилась бы въ покоѣ. Если ds и dt даны, то скорость точки въ данномъ элементѣ пути будетъ очевидно на основаніи (2):

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{6}$$

*) Буква d, поставленная передъ алгебраическимъ выраженіемъ какой либо величины, показываетъ, что эта величина безконечно мала.

Хотя ds и dt, каждое отдѣльно, безконечно малы, но отношеніе ихъ $\frac{ds}{dt}$ можетъ имѣть очевидно опредѣленную конечную величину, и выразитъ конечное пространство, которое точка пройдетъ въ единицу времени, если, пройдя данный элементъ ds, будетъ двигаться далѣе, не измѣняя своей скорости ни по величинѣ, ни по направленію.

Если направленіе скорости не измѣнится, то оно будетъ представлять прямую линію, совпадающую съ элементомъ ds. Такая прямая называется касательною въ данномъ элементѣ къ траэкторіи движущейся точки.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ графическій способъ представленія скорости въ какомъ нибудь мѣстѣ C пути AB криволинейнаго перемѣннаго движенія. Въ точкѣ C (рис. 10) мы проводимъ, въ сторону движенія, касательную къ кривой AB, т. е. линію совпадающую съ элементомъ CD кривой, лежащимъ около точки C (все равно, непосредственно до нея, или послѣ нея, или по бокамъ ея). На этой прямой, въ сторону движенія, мы откладываемъ величину скорости v, CV, т. е. частное, получаемое отъ дѣленія длины промежутка пути CD на время dt, въ которое этотъ путь проходится. Если движущаяся точка, минуя элементъ CD, пойдетъ далѣе, не измѣняя своей скорости по величинѣ и направленію, то въ единицу времени, т. е. въ секунду, она пройдетъ длину CV (или DV, ибо въ предѣлѣ $CV = DV$, такъ какъ CD безконечно мало).

Рис. 10.

Дифференціальное исчисленіе учитъ насъ находить отношеніе двухъ безконечно малыхъ величинъ $\frac{ds}{dt}$ для всякаго даннаго движенія.

Чтобы составить себѣ понятіе о томъ, какъ разыскивается скорость при данномъ движеніи мы разберемъ нѣсколько простыхъ случаевъ.

1) Предположимъ, что по какой нибудь траэкторіи точка движется такимъ образомъ, что зависимость длины s, проходимаго ею пространства, отъ времени выражается формулою

$$s = at\,.$$

Пусть требуется опредѣлить скорость точки въ томъ мѣстѣ, въ которое она прійдетъ по прошествіи времени t отъ начала движенія.

Это мѣсто мы найдемъ, отложивши длину $AM = at$ (рис. 11) на данной траэкторіи отъ даннаго пункта исхода A движущейся точки.

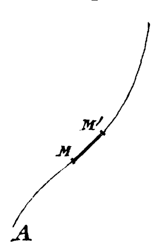


Рис. 11.

Касательная къ траэкторіи въ этомъ мѣстѣ опредѣлитъ направленіе скорости. Величина-же ея найдется, если мы узнаемъ безконечно малое пространство MM', проходимое точкою въ теченіи безконечно малаго промежутка времени до или послѣ момента времени t. Выберемъ нѣкоторый моментъ времени t', слѣдующій за моментомъ t и безконечно къ нему близкій, такъ что въ безконечно малый промежутокъ времени $t'-t$ точка пройдетъ безконечно малую часть своего пути MM'. Тогда очевидно, такъ какъ

$$AM = at\,, \quad AM' = at',$$

то

$$MM' = AM' - AM = ds = a(t'-t);$$

а такъ какъ время прохожденія элемента MM', которое мы обозначаемъ черезъ dt, есть $t'-t$, то по (6):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{MM'}{t'-t} = \frac{a(t'-t)}{t'-t} = a\,.$$

Мы видимъ, что скорость для каждаго момента времени остается одна и таже, равная a. Движеніе по траэкторіи есть слѣдовательно равномѣрное. Какой-бы мы ни брали промежутокъ времени $t'-t$, безконечно малый или конечный, частное $\frac{MM'}{t'-t}$ всегда останется одно и тоже.

2) Пусть длина пути, проходимаго точкою по ея траэкторіи отъ даннаго мѣста исхода, выражается формулою

$$s = bt^2.$$

Требуется найти скорость для момента времени t. Длина пути s', проходимаго отъ точки исхода до момента времени t', безконечно близкаго къ t, будетъ

$$s' = bt'^2.$$

Длина пути, проходимаго въ безконечно малый промежутокъ времени $t'-t$, будетъ

$$s' - s = ds = b(t'^2 - t^2).$$

Слѣдовательно скорость

$$v = \frac{s' - s}{t' - t} = \frac{ds}{dt} = \frac{b(t'^2 - t^2)}{t' - t}$$

$$= \frac{b(t' - t)(t' + t)}{t' - t} = b(t' + t).$$

Но такъ какъ $t' - t$ должно быть меньше всякой данной величины, то въ предѣлѣ можетъ быть положено

$$t' - t = 0\,, \quad \text{откуда } t' = t\,,$$

и слѣдовательно

$$v = 2bt\,,$$

т. е. скорость возрастаетъ пропорціонально времени. Такое движеніе называется равномѣрно ускореннымъ. При немъ очевидно въ равные и произвольно выбранные промежутки времени скорость возрастаетъ на равныя величины.

3) Пусть движеніе выражается формулою

$$s = ct^n.$$

Тогда, сохраняя обозначенія предыдущихъ примѣровъ, мы будемъ имѣть:

$$s' = ct'^n\,, \quad s' - s = c(t'^n - t^n)\,,$$

$$v = \frac{s' - s}{t' - t} = c\,\frac{t'^n - t^n}{t' - t}$$

$$= c(t'^{n-1} + t'^{n-2}t + t'^{n-3}t^2 + \dots t't^{n-2} + t^{n-1}).$$

Число всѣхъ элементовъ суммы будетъ n. Полагая въ предѣлѣ $t' = t$, получаемъ:

$$v = c(t^{n-1} + t^{n-1} + \dots) = nct^{n-1}.$$

Скорость возрастаетъ пропорціонально $n - 1$ степени времени.

§ 4. Сложеніе скоростей.

Мы видѣли уже въ § 1, что движеніе точки въ пространствѣ намъ извѣстно, когда дано ея движеніе по какимъ нибудь тремъ линіямъ, не параллельнымъ и не лежащимъ въ одной плоскости, ибо по положенію извѣстнымъ образомъ взятыхъ проложеній точки на упомянутыхъ трехъ линіяхъ мы можемъ для всякаго момента времени найти ея положеніе въ пространствѣ. Вопросъ теперь состоитъ въ томъ, какъ по тремъ даннымъ скоростямъ упомянутыхъ проложеній найти скорость движущейся точки въ пространствѣ, или иначе,

как сложить три данныя скорости, принадлежащія одной и тойже движущейся точкѣ.

Когда движущаяся точка проходитъ по своему криволинейному пути безконечно малую длину ds (прямолинейную), то ея проложенія проходятъ по осямъ координатъ (вообще по какимъ угодно тремъ не параллельнымъ и не лежащимъ въ одной плоскости линіямъ) безконечно малыя длины dx, dy, dz. Слѣдовательно dx, dy, dz будутъ проложеніями элемента пути ds на оси координатъ. Величина упомянутыхъ проложеній останется таже, если мы будемъ пролагать ds не на данныя оси координатъ, но на другія какія либо три прямыя линіи имъ параллельныя *). Поэтому, проводя черезъ начало элемента ds (рис. 12) три линіи, параллельныя даннымъ осямъ координатъ, и пролагая на нихъ ds, мы замѣтимъ, что ds представится намъ діагональю параллелепипеда, ребра котораго будутъ dx, dy, dz. Если мы каждое изъ реберъ упомянутаго параллелепипеда увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то діагональ новаго параллелепипеда, построеннаго на измѣненныхъ ребрахъ, будетъ очевидно увеличена или уменьшена во столько же разъ, какъ ребра, и не измѣнитъ своего положенія.

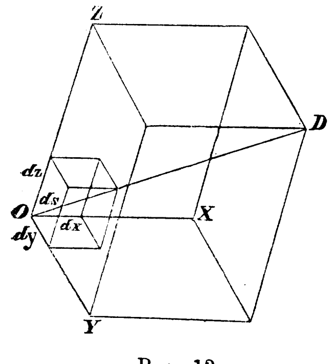


Рис. 12.

Если слѣдовательно мы увеличимъ ребра dx, dy, dz нашего параллелепипеда въ $\frac{1}{dt}$ разъ, то получимъ новый параллелепипедъ съ ребрами

$$OX = \frac{dx}{dt}, \quad OY = \frac{dy}{dt}, \quad OZ = \frac{dz}{dt},$$

*) Проложеніе или проэкцію одной линіи, кривой или прямой, на другую мы находимъ, проводя изъ каждой точки пролагаемой или проэктируемой линіи прямыя, параллельныя данной плоскости, такъ, чтобы онѣ пересѣкали ту линію, на которую мы пролагаемъ, или, что все равно, проводя черезъ точки пролагаемой линіи плоскости, параллельныя данной. Обѣ линіи, пролагаемая и та, на которую мы пролагаемъ, вообще могутъ лежать въ разныхъ плоскостяхъ. Ища проложенія на оси координатъ, мы проводимъ черезъ точки пролагаемой линіи плоскости, параллельныя плоскости двухъ какихъ нибудь изъ трехъ осей, чтобы получить проложеніе на третью ось. Проложеніе какой нибудь линіи на данную плоскость мы находимъ проводя черезъ каждую точку линіи прямыя параллельныя данной прямой. Ища проложеніе на какую нибудь изъ плоскостей координатъ мы проводимъ черезъ точки пролагаемой линіи прямыя, параллельныя третьей оси, не лежащей въ этой плоскости.

діагональ котораго будетъ $OD=\frac{ds}{dt}$, и совпадетъ по направленію съ ds. Если подъ dt мы будемъ подразумѣвать время, въ которое движущаяся точка проходитъ элементъ ds своего пути, а ея проложенія на оси координатъ проходятъ длины dx, dy, dz по этимъ послѣднимъ, то отношенія $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ выразятъ скорости проложеній по соотвѣтствующимъ осямъ координатъ, и $\frac{ds}{dt}$ — скорость по траэкторіи. Такимъ образомъ мы видимъ, что если даны скорости точки (т. е. ея проложеній) по тремъ осямъ координатъ, то скорость по траэкторіи находится, какъ діагоноль параллелепипеда, построеннаго на данныхъ скоростяхъ. Т. е. скорости проложеній $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ суть въ тоже время проложенія скорости $\frac{ds}{dt}$.

Въ случаѣ прямоугольныхъ осей координатъ квадратъ діагонали будетъ равенъ суммѣ квадратовъ трехъ реберъ, и мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{7}$$

Вышеупомянутыя три скорости называются слагающими скоростями; четвертая скорость, по нимъ находимая, называется результирующею скоростію. Если движеніе точки опредѣляется только двумя скоростями, то скорость точки по траэкторіи лежитъ въ плоскости двухъ данныхъ скоростей. Это будетъ имѣть мѣсто очевидно въ томъ случаѣ, когда скорость относительно одной изъ трехъ осей координатъ равна нулю. Въ такомъ случаѣ построеніе параллелепипеда обращается въ построеніе параллелограмма на двухъ данныхъ скоростяхъ, какъ на сторонахъ; результирующая скорость будетъ діагональю этого параллелограмма.

Изъ рисунка (13) мы видимъ, что если три ребра параллелепипеда намъ даны, то нѣтъ надобности строить всѣ остальные девять реберъ параллелепипеда, для полученія величины и направленія его діагонали. Для упомянутой цѣли достаточно изъ конца одного изъ трехъ реберъ, напр. AB, провести линію параллельную и равную одному изъ двухъ остальныхъ реберъ (напр. BC), и изъ конца этой послѣдней—линію параллельную и равную третьему ребру

(напр. CD); соединяя конецъ этой послѣдней линіи съ точкою пересѣченія A трехъ данныхъ реберъ (въ случаѣ скоростей, это будетъ ихъ точка приложенія) мы получимъ искомую діагональ AD.

Изъ того-же рисунка мы видимъ, что находить результирующую скорость мы можемъ, складывая сперва двѣ изъ трехъ данныхъ скоростей (т. е. ища сперва ихъ результирующую въ томъ предположеніи, что третья скорость есть нуль), и затѣмъ складывая найденную результирующую съ третьей скоростію. Каждая изъ трехъ скоростей AB, BC, CD (рис. 13), составляющихъ результирующую скорость AD, можетъ въ свою очередь быть дана не прямо, но съ помощію ея составляющихъ по какимъ нибудь направленіямъ. Въ такомъ случаѣ очевидно каждая изъ вышеупомянутыхъ трехъ скоростей должна быть найдена, какъ результирующая своихъ слагающихъ, по вышеизложенному способу построенія трехъ реберъ параллелепипеда (или двухъ сторонъ параллелограмма). Слѣдовательно скорость AB можетъ быть представлена на рисункѣ, какъ заключительная сторона многоугольника, стороны котораго (вообще очевидно не лежащія въ одной плоскости) AG, GH, HB проведены параллельно даннымъ слагающимъ скорости AB; точно также BC будетъ заключительною стороною подобнымъ-же образомъ построеннаго многоугольника BKC, и т. д. Разсматривая полученный такимъ образомъ многоугольникъ $AGHBKCEFD$, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: если слагающія скорости даны не непосредственно, а съ помощію своихъ слагающихъ, а эти послѣднія опять съ помощію своихъ, и т. д. до какого угодно числа скоростей, то для построенія общей результирующей намъ нѣтъ надобности производить послѣдовательно сложенія сперва нѣсколькихъ скоростей по двѣ или по три, потомъ полученныя скорости опять складывать по двѣ или по три, пока не прійдемъ къ послѣднимъ тремъ слагающимъ AB, BC и CD; напротивъ, мы можемъ непосредственно строить ломаную линію, колѣна которой равны и параллельны всѣмъ даннымъ скоростямъ; прямая, замыкающая такого рода ломаную линію, обращая ее въ замкнутый многоугольникъ, и будетъ общею результирующею всѣхъ данныхъ слагающихъ скоростей. Направленія слагающихъ скоростей

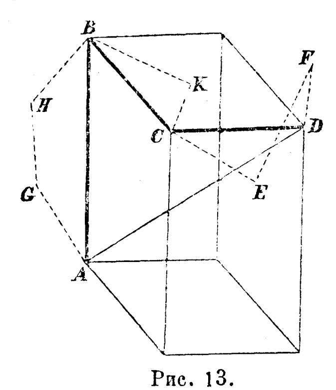


Рис. 13.

по периметру упомянутаго многоугольника будутъ идти всѣ въ одну сторону, а направленіе результирующей—въ обратную.

Величина и направленіе результирующей не измѣнятся, если мы измѣнимъ порядокъ послѣдованія другъ за другомъ колѣнъ ломаной линіи, параллельныхъ даннымъ слагающимъ скоростямъ, т. е. если мы измѣнимъ порядокъ сложенія. Для этого достаточно показать, что мы можемъ переставить какъ угодно одну послѣ другой каждыя двѣ или три скорости. Изъ рисунка сложенія трехъ или двухъ скоростей ясно непосредственно слѣдуетъ, что мы прійдемъ къ одной и той-же результирующей, въ какомъ-бы порядкѣ ни проводили колѣна ломаной линіи, параллельныя даннымъ скоростямъ. Такимъ образомъ, имѣя скорости a, b, c, d, e, представленныя въ видѣ многоугольника, мы можемъ перемѣнить мѣста сторонъ, положимъ, c и d, и будемъ имѣть многоугольникъ a, b, d, c, e; измѣняя затѣмъ мѣста b и d, будемъ имѣть a, d, b, c, e, и т. д. очевидно можемъ любую изъ данныхъ сторонъ поставить на мѣсто любой изъ остальныхъ, сохраняя при этомъ конечно ихъ параллельность даннымъ слагающимъ скоростямъ, приложеннымъ къ одной точкѣ.

Итакъ, результирующая скорость можетъ быть представлена, какъ заключительная сторона многоугольника, стороны котораго равны и параллельны даннымъ слагающимъ скоростямъ и построены въ какомъ угодно порядкѣ послѣдованія другъ за другомъ. Величина результирующей скорости не измѣняется отъ измѣненія порядка сложенія, какъ алгебрическая сумма не измѣняется отъ измѣненія порядка слагаемыхъ.

Описанный способъ сложенія скоростей, какъ количествъ, имѣющихъ величину и направленіе, называется геометрическимъ сложеніемъ; количество, получаемое въ результатѣ геометрическаго сложенія называется геометрическою суммою.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ очевидно, что слагая данныя скорости, мы рѣшаемъ вопросъ, съ какою скоростію должна двигаться равномѣрно точка, чтобы въ единицу времени прійти въ тоже положеніе, въ которое она пришла-бы, обладая послѣдовательно каждою изъ данныхъ слагаемыхъ скоростей въ теченіи единицы времени.

Умѣя складывать скорости мы можемъ очевидно также наоборотъ разлагать данную скорость на какое угодно число скоростей,

направленія которыхъ даны. Въ такомъ случаѣ величина скоростей можетъ быть выбрана произвольно кромѣ двухъ послѣднихъ.

Если дана результирующая и всѣ слагающія безъ одной, то недостающая слагающая опредѣлится очевидно, какъ заключительная сторона многоугольника, построеннаго на результирующей и данныхъ слагающихъ. Направленіе искомой слагающей должно быть взято вдоль по периметру многоугольника въ одну сторону съ остальными слагающими.

Съ измѣненіемъ направленія по пролагаемой линіи (напр. AB или BA, рис. 14) измѣняется очевидно и направленіе по ея проложенію, косоугольному или прямоугольному. Слѣдовательно, если направленіе скорости мѣняется въ прямо противоположное, то такимъ же образомъ мѣняются направленія ея слагающихъ.

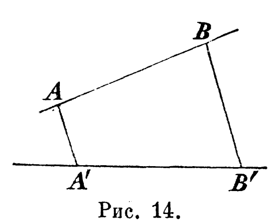


Рис. 14.

Проложимъ стороны AB, BC, ... DE, EA какого нибудь замкнутаго многоугольника на какую нибудь линію MN косоугольно или прямоугольно, и будемъ считать направленіе сторонъ въ одну сторону по периметру многоугольника; положительное направленіе проложеній будемъ считать также въ одну какую нибудь сторону по MN. Тогда очевидно, какъ это легко видѣть изъ рисунка (15): алгебраическая сумма проложеній замкнутаго многоугольника (лежащаго въ одной плоскости или въ нѣсколькихъ) на какую нибудь прямую будетъ равна нулю *). Такъ какъ съ другой стороны очевидно, что геометрическая сумма сторонъ многоугольника, считаемыхъ по периметру въ одну сторону, будетъ тоже нуль, то предъидущее заключеніе можно выразить такимъ образомъ: если геометрическая сумма прямыхъ равна нулю, то алгебраическая сумма ихъ проложеній на другую какую нибудь линію тоже есть нуль.

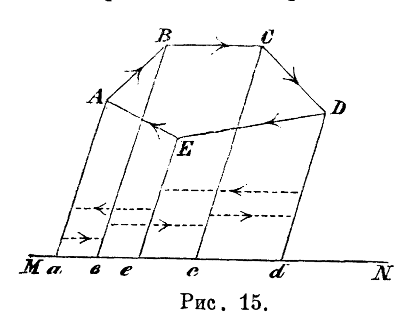


Рис. 15.

Называя положительныя или отрицательныя величины упомянутыхъ проложеній черезъ a, b, c и т. д., мы будемъ имѣть для слу-

*) т. е. $ab + bc + cd - de - ea = 0$.

чая когда всѣ колѣна направлены по периметру въ одну сторону:

$$a + b + c + d + \ldots + k = 0\,,$$

$$b + c + d + \ldots + k = -a\,,$$

т. е. одно изъ проложеній, взятое съ противнымъ знакомъ, равно суммѣ всѣхъ остальныхъ. Слѣдовательно проложеніе одной стороны многоугольника на какую нибудь линію равно суммѣ проложеній на туже линію остальныхъ сторонъ, считаемыхъ по периметру въ обратную сторону съ первой. Но такъ какъ въ такомъ случаѣ очевидно первая сторона равна геометрической суммѣ всѣхъ остальныхъ, то мы можемъ вывести слѣдующее общее заключеніе:

Сумма проложеній данныхъ прямыхъ на какую нибудь другую прямую равна проложенію ихъ геометрической суммы.

Прилагая это заключеніе къ скоростямъ, мы получаемъ, что

Проложеніе результирующей скорости на какую нибудь прямую равно суммѣ проложеній ея слагающихъ.

Въ частномъ случаѣ, когда прямая, на которую пролагаются скорости, совпадаетъ съ результирующею, мы имѣемъ, что результирующая равна суммѣ проложеній на нее слагающихъ. Такъ какъ при этомъ величина результирующей при данныхъ слагающихъ всегда очевидно одна и таже, то заключаемъ, что, какимъ-бы образомъ мы ни пролагали слагающія на ихъ результирующую (т. е. косоугольно, или прямоугольно), алгебраическая сумма проложеній будетъ всегда одна и таже—равная результирующей.

Операція упомянутаго прежде геометрическаго сложенія представляетъ собою ничто иное, какъ разысканіе, съ помощію геометрическаго построенія, пролагаемой линіи по даннымъ ея проложеніямъ. Складываться геометрически могутъ слѣдовательно всѣ однородныя между собою величины, которыя по величинѣ и направленію могутъ быть представляемы прямыми линіями, и изъ которыхъ каждая можетъ быть дана своими проложеніями на какія либо направленія. Алгебраическое сложеніе есть частный случай геометрическаго сложенія величинъ, направленныхъ въ ту или другую сторону по одной и той же прямой. Для обозначенія геометрическаго сложенія мы будемъ употреблять знакъ $+\!\!\!\!\!\!\;\smile$. Слѣдовательно если величина S есть

геометрическая сумма величинъ A, B, C и т. д., то мы будемъ обозначать

$$S = A + B + C + \cdots, \tag{7}'$$

выражая тѣмъ, что линія S есть заключительная сторона ломаной линіи, состоящей изъ A, B, $C \ldots$, направленныхъ въ одну сторону по периметру въ обратномъ смыслѣ относительно S.

На оборотъ, если дана геометрическая сумма величинъ и одно изъ слагаемыхъ, то геометрическая сумма остальныхъ слагаемыхъ опредѣлится, какъ геометрическая разность двухъ первыхъ названныхъ величинъ. Геометрическое вычитаніе мы будемъ обозначать знакомъ $\sim$, и на основаніи его опредѣленія будемъ имѣть изъ $(7)'$:

$$B + C + D + \cdots = S \sim A. \tag{7}''$$

---

§ 5. Относительная скорость.

Всякое движеніе есть относительное, ибо положенія движущихся точекъ, мы можемъ только опредѣлять относительно чего нибудь, но не абсолютно. Опредѣляя положеніе и движеніе точки относительно даннаго тѣла или данной поверхности, мы ничего не можемъ сказать о положеніи самаго этого тѣла или самой поверхности, пока у насъ нѣтъ еще другаго тѣла, относительно котораго мы опредѣлили бы положеніе перваго.

Вопросъ объ относительномъ движеніи вообще сводится къ рѣшенію задачи—по данному движенію относительно однѣхъ осей координатъ и по данному движенію этихъ осей въ пространствѣ, т. е. относительно новыхъ осей, найти движеніе точки относительно этихъ послѣднихъ, или обратно—найти движеніе точки относительно первыхъ осей, когда дано, по прежнему, движеніе первыхъ осей и движеніе точки относительно послѣднихъ.

Тѣ оси, о движеніи которыхъ въ этихъ вопросахъ не упоминается, называются условно неподвижными, а движеніе по нимъ—абсолютнымъ, но тоже условно; движеніе по подвижнымъ осямъ называется относительнымъ по преимуществу. Такимъ же образомъ различаются скорости по осямъ координатъ, движеніе которыхъ

не дано, и скорости по осямъ, которыя движутся относительно первыхъ. Первыя скорости въ такомъ случаѣ называются абсолютными, вторыя—относительными. Такъ какъ понятіе о скорости заключаетъ въ себѣ представленіе о прямолинейномъ движеніи, то вопросъ объ относительныхъ скоростяхъ будетъ частнымъ случаемъ общаго вопроса объ относительномъ движеніи.

Пусть AB (рис. 16) представляетъ скорость, приложенную въ концѣ времени t къ точкѣ A и совпадающую съ направленіемъ движенія. Движущаяся точка остается на этой линіи по крайней мѣрѣ въ теченіи безконечно малаго элемента времени dt. Предположимъ далѣе что линія AB не остается неподвижною въ плоскости рисунка, но движется по ней, имѣя въ тотъ же данный моментъ времени для всѣхъ своихъ точекъ скорость AC. Это значитъ, что всѣ точки линіи AB, вмѣстѣ съ движущеюся по ней точкою, перемѣщаются параллельно AC, съ данною скоростію, по крайней мѣрѣ въ теченіи элемента времени dt, слѣдующаго за моментомъ t (т. е. наступающаго по истеченіи времени t). Если скорости точки и линіи неизмѣнятся въ теченіи единицы времени, слѣдующей за t, то въ эту единицу времени точка пройдетъ по линіи длину AB; а сама линія всѣми своими точками пройдетъ длину AC и займетъ положеніе CD. Требуется найти скорость движенія по неподвижной плоскости рисунка, которое въ данномъ случаѣ должно быть принято за абсолютное. Въ теченіи единицы времени точка перемѣстится по плоскости очевидно изъ A въ D. Легко показать, что движеніе ея между A и D будетъ прямолинейное и равномѣрное. Дѣйствительно, предположимъ что линія AB, двигаясь равномѣрно по AC, пройдетъ какую нибудь n—ную часть своего пути, AK, которую она пройдетъ очевидно въ n—ную часть секунды; но такъ какъ точка движется вдоль по самой линіи AB тоже равномѣрно, то въ n—ную часть секунды она пройдетъ по движущейся линіи длину KL, которая составитъ тоже n—ную часть отъ AB или равной ей CD. Слѣдовательно

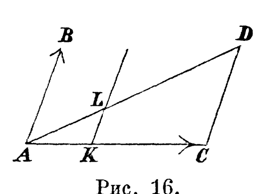


Рис. 16.

$$\frac{AK}{AC}=\frac{KL}{DC}=\frac{1}{n};$$

а это отношеніе тогда возможно, когда три точки A, L и D лежатъ на одной прямой. Такъ какъ n можетъ быть какою угодно величи-

ною, то заключаемъ, что для всякаго момента времени, въ теченіи секунды, точка будетъ на прямой AD. Кромѣ того, такъ какъ

$$\frac{AL}{DA}=\frac{1}{n},$$

то мы заключаемъ, что длины, проходимыя точкою по прямой AD, будутъ пропорціональны времени ($\frac{1}{n}$ доли секунды), т. е. что движеніе будетъ равномѣрное. Итакъ, AD, представляя длину, проходимую точкою равномѣрно въ единицу времени по плоскости рисунка, будетъ искомая абсолютная скорость, и представится геометрическою суммою двухъ данныхъ скоростей.

Если плоскость рисунка не остается неподвижною, но перемѣщается съ нѣкоторою скоростію AE (рис. 17), не лежащею вообще въ плоскости BAC, то линія AD будетъ двигаться съ тою же скоростію, и для нахожденія абсолютной скорости точки мы должны сложить скорости AD и AE. И такъ далѣе для какого угодно числа скоростей.

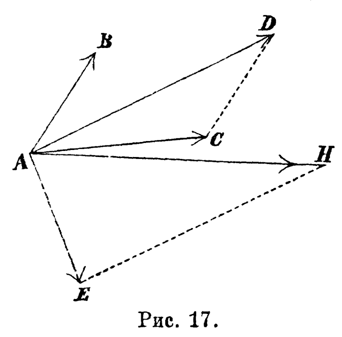


Рис. 17.

Такимъ образомъ мы видимъ, что вопросъ о нахожденіи абсолютной скорости по даннымъ относительнымъ приводится вообще къ сложенію этихъ послѣднихъ.

Слѣдовательно нѣсколько скоростей, приложенныхъ къ одной точкѣ, мы можемъ себѣ представлять, кромѣ способа предъидущаго параграфа, еще какъ рядъ относительныхъ скоростей, опредѣляющихъ собою нѣкоторую абсолютную скорость.

Вопросъ о нахожденіи относительной скорости по данной абсолютной и другимъ относительнымъ очевидно сводится къ геометрическому вычитанію, т. е. къ нахожденію слагающей скорости по данной геометрической суммѣ скоростей и по остальнымъ слагающимъ.

Очевидно, что если данныя слагаемыя скорости направлены всѣ по одной и той же прямой, въ ту или другую сторону, то многоугольникъ скоростей обращается въ прямую, и результирующая скорость будетъ алгебраическою суммою слагающихъ, причемъ скорости,

направленныя по прямой въ разныя стороны отъ ихъ точки приложенія, должны имѣть разные знаки.

Если мы имѣемъ точку A, движущуюся по прямой линіи (рис. 18), то мы только тогда можемъ различать это движеніе, когда на той же прямой линіи намъ дана еще точка B, измѣненіе разстоянія отъ которой движущейся точки мы можемъ измѣрять. Если сама точка B движется по той же линіи относительно третьей точки C, то по предъидущему очевидно, скорость A относительно B будетъ равна разности скоростей B и A относительно третьей точки C. Если обѣ точки A и B имѣютъ скорости по различнымъ прямымъ, то относительная скорость ихъ проложеній по осямъ координатъ будетъ равна разности скоростей этихъ проложеній. Складывая эти разности, мы получимъ относительную скорость двухъ точекъ, которая очевидно будетъ геометрическою разностію ихъ скоростей. Итакъ, *относительная скорость двухъ точекъ равна геометрической разности ихъ абсолютныхъ скоростей.*

Рис. 18.

Напримѣръ, пусть (рис. 19) AV_1 будетъ скорость одной точки, и BV_2—другой. Чтобы найти скорость B относительно A мы должны изъ послѣдней вычесть геометрически первую. Для этого переносимъ обѣ скорости въ одну точку, положимъ A, и проводимъ заключительную сторону V_1V_2, которая и представитъ искомую скорость. Направленіе ея по периметру многоугольника должно совпадать съ вычитаемою скоростію, т. е. идти отъ V_2 къ V_1. Очевидно что скорость A относительно B будетъ таже, но направлена отъ V_1 къ V_2. Въ первомъ случаѣ діагональю параллелограмма скоростей будетъ AV_1, во второмъ AV_2. Относительная скорость двухъ точекъ будетъ нуль, т. е. точки будутъ въ покоѣ относительно другъ друга, когда скорости ихъ равны, параллельны и направлены въ одну сторону.

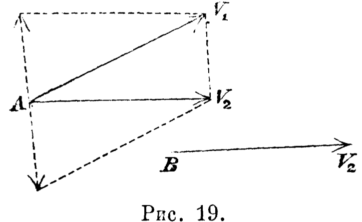


Рис. 19.

Вышеприведенное опредѣленіе относительной скорости двухъ точекъ мы дѣлали въ томъ предположеніи, что даны ихъ абсолютныя скорости, т. е. извѣстно ихъ движеніе относительно *данныхъ* въ пространствѣ плоскостей (координатъ) или линій. Но если мы вообразимъ себѣ только одну точку въ пространствѣ, безъ всякаго отношенія къ какимъ либо другимъ даннымъ геометрическимъ мѣстамъ,

то мы не будемъ въ состоянiи приписать этой точкѣ какое либо движенiе: для нашего понятiя, состоянiя покоя и движенiя такой точки будутъ безразличны. Тоже самое мы должны заключить и о какомъ угодно числѣ точекъ, неизмѣннымъ образомъ связанныхъ другъ съ другомъ, т. е. о неизмѣняющихся линiяхъ, поверхностяхъ и тѣлахъ. Если мы имѣемъ только двѣ точки въ пространствѣ, то мы можемъ понять ихъ движенiе только по стольку, по скольку измѣняется ихъ взаимное разстоянiе. Объ измѣненiи положенiя самой линiи, соединяющей обѣ данныя точки, мы не можемъ судить, ибо не будемъ имѣть возможности отмѣтить какъ нибудь это измѣненiе. Такимъ образомъ, если одна точка двигалась-бы около другой по поверхности сферы, въ центрѣ которой была-бы эта другая точка, то въ нашемъ представленiи обѣ точки должны-бы были оставаться въ покоѣ, ибо ихъ разстоянiе не измѣнялось-бы. Въ упомянутомъ движенiи мы могли-бы только тогда отдать себѣ отчетъ, когда кромѣ двухъ разсматриваемыхъ точекъ имѣли-бы въ пространствѣ еще какiя либо намѣченныя геометрическiя мѣста, относительно которыхъ мы могли-бы замѣтить измѣненiе положенiя линiи, соединяющей обѣ точки.

Если даны въ пространствѣ точка и прямая, то измѣненiе ихъ относительнаго положенiя будетъ состоять только въ измѣненiи разстоянiя точки отъ линiи, т. е. длины перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на линiю. Линiя въ этомъ случаѣ предполагается неопредѣленной длины, ибо если-бы была дана ея длина, т. е. ея концы, то мы имѣли-бы случай прямой и двухъ отмѣченныхъ на ней точекъ. Слѣдовательно точка, движущаяся по круглой цилиндрической поверхности, находится въ покоѣ относительно оси этой поверхности,

На основанiи подобныхъ-же соображенiй мы заключаемъ, что точка, движущаяся какъ угодно въ плоскости, параллельной другой данной плоскости, остается относительно этой послѣдней въ покоѣ. Если точка движется по линiи, параллельной двумъ плоскостямъ, то она остается въ покоѣ относительно этихъ плоскостей. На оборотъ, точка, остающаяся въ покоѣ относительно другой точки, линiи; двухъ линiй, плоскости, двухъ плоскостей, можетъ въ тоже время двигаться относительно другихъ точекъ, линiй, плоскостей.

Но разстоянiями точки отъ трехъ плоскостей или трехъ линiй вполнѣ опредѣляется ея положенiе въ пространствѣ; слѣдовательно, если точка остается въ покоѣ относительно трехъ неподвижныхъ линiй, не параллельныхъ и не лежащихъ въ одной плоскости, или трехъ

неподвижныхъ плоскостей, то она будетъ въ покоѣ относительно всякихъ другихъ неподвижныхъ точекъ, линій или плоскостей. Дѣйствительно, если-бы точка обладала какою скоростію, оставаясь неподвижною относительно неподвижныхъ осей координатъ, то эта скорость должна-бы была оставаться параллельною тремъ разнымъ плоскостямъ, чего быть не можетъ.

Если скорость точки для извѣстнаго момента времени дана, то ея скорость относительно какой нибудь линіи или плоскости опредѣлится, если мы данную скорость точки разложимъ на двѣ слагающихъ, изъ которыхъ одна будетъ перпендикулярна къ данной линіи или плоскости, а другая параллельна; первая изъ слагающихъ будетъ искомая относительная скорость; вторая будетъ скоростію точки по данной линіи или данной плоскости.

Итакъ, ортогональное (прямоугольное) проложеніе скорости точки на какую нибудь линію или плоскость представитъ скорость той-же точки по этой линіи или плоскости. Ортогональное проложеніе скорости точки на перпендикуляръ къ данной линіи или плоскости выразитъ скорость относительно этой линіи или плоскости.

§ 6. Равномѣрно ускоренное прямолинейное движеніе.

Равномѣрно ускореннымъ называется такое перемѣнное движеніе, при которомъ скорости въ равные и произвольно выбранные промежутки времени возрастаютъ на равныя величины, т. е. вообще возрастаютъ пропорціонально времени. Если скорости убываютъ по тому-же закону, то движеніе называется равномѣрно укоснительнымъ.

Приращеніе скорости (положительное или отрицательное) въ единицу времени при равномѣрноускоренномъ прямолинейномъ движеніи называется ускореніемъ.

Обозначимъ черезъ v_0 скорость точки въ началѣ нѣкотораго промежутка времени t, черезъ v — скорость въ концѣ этого промежутка; тогда приращеніе скорости въ теченіи времени t будетъ $v - v_0$. Если движеніе равномѣрно ускоренное, то приращеніе скорости въ теченіи единицы времени будетъ $\frac{v - v_0}{t}$. Обозначая поэтому черезъ g ве-

личину ускоренія, мы будемъ имѣть:

$$g = \frac{v - v_0}{t},$$

откуда (8)

$$v = v_0 + gt.$$

Ускореніе, какъ количество, получаемое отъ дѣленія другъ на друга двухъ величинъ разныхъ наименованій (скорости на время), будетъ имѣть наименованіе, отличное отъ дѣлимаго и дѣлителя. Единица ускоренія на основаніи (8) и (5) опредѣлится слѣдующимъ образомъ:

$$\text{ед. ускор.} = \frac{\text{ед. скор.}}{\text{сек.}} = \frac{\text{цент.}}{\text{сек.}^2}. \qquad (9)$$

Слѣдовательно, если g будетъ численная вечичина ускоренія, то полное ея обозначеніе будетъ $g\frac{\text{цент.}}{\text{сек.}^2}$, въ томъ смыслѣ, что, при данномъ равномѣрно ускоренномъ движеніи, въ концѣ каждой секунды движущаяся точка пріобрѣтетъ такую скорость, съ которою, двигаясь далѣе равномѣрно, прошла-бы въ каждую послѣдующую секунду длину пути на g центиметровъ большую, нежели въ томъ случаѣ, еслибъ она стала двигаться равномѣрно съ конца предыдущей секунды времени. Графически ускореніе можетъ быть представлено прямою линіею, направленіе которой, считая отъ точки приложенія, совпадаетъ съ направленіемъ наростающей скорости, а длина заключаетъ въ себѣ столько единицъ длины, сколько данное ускореніе—единицъ ускоренія.

Проложеніе (прямоугольное или косоугольное) равномѣрно ускоренно движущейся точки на какую нибудь прямую линію или плоскость будетъ очевидно двигаться тоже равномѣрно ускоренно, ибо если скорость возрастаетъ равномѣрно, то также будетъ возрастать и ея проложеніе. Слѣдовательно, ускореніе проложеннаго движенія будетъ равно проложенію на туже линію ускоренія самой движущейся точки. Поэтому ускореніе точки отыскивается по ускореніямъ проложеній точки также, какъ пролагаемая линія отыскивается по ея проложеніямъ, т. е. ускоренія складываются, какъ скорости.

Изъ примѣровъ 1) и 2) (§ 3) мы заключаемъ, что если зависимость длины пути, проходимаго движущеюся точкою, отъ времени

выражается формулою

$$s = at + bt^2,$$

то скорость будетъ

$$v = a + 2bt.$$

Сравнивая эти два выраженія съ форм. (8), мы заключаемъ, что длина пути, проходимая равномѣрно ускоренно движущеюся точкою во время t, при начальной скорости v_0 и при ускореніи g, будетъ

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \qquad (9)$$

Исключая время изъ уравненій (8) и (9), мы получимъ:

$$s = \frac{1}{2g}(v^2 - v_0^2), \qquad (10)$$

$$v = \sqrt{2gs + v_0^2}, \qquad (11)$$

формулы для опредѣленія пространства по начальной и конечной скоростямъ, или конечной скорости—по пройденному пространству и начальной скорости.

Пространства, проходимыя точкою равномѣрно ускоренно въ теченіи каждаго изъ ряда слѣдующихъ другъ за другомъ равныхъ промежутковъ времени, не будутъ равны между собою. Положимъ, что величина каждаго изъ равныхъ промежутковъ времени будетъ T сек., и найдемъ пространство, проходимое въ теченіи n—наго промежутка времени. Искомое пространство будетъ равно длинѣ, пройденной въ теченіи всѣхъ n промежутковъ времени (т. е. во время Tn) безъ длины, пройденной въ $n-1$ промежутковъ (т. е. во время $(n-1)T$). Слѣдовательно, обозначая искомую величину черезъ S, мы имѣемъ по (9):

$$S = v_0 nT + \frac{1}{2} g n^2 T^2 - \left(v_0(n-1)T + \frac{1}{2}(n-1)^2 T^2\right) \qquad (12)$$

$$= v_0 T + \frac{g}{2}(2n-1)T^2;$$

т. е. пространство возрастаетъ пропорціонально нечетнымъ числамъ.

Въ предыдущей формулѣ $v_0 T$ представляетъ пространство, которое точка прошла-бы въ промежутокъ времени T, двигаясь равномѣрно; мы обозначимъ его черезъ l_0. Черезъ l обозначимъ величину $g\frac{T^2}{2}$, т. е. приращеніе пройденнаго пространства въ тотъ-же проме-

жутокъ, вслѣдствіе существованія ускоренія g. Тогда пространства, проходимыя въ 1-й, 2-й и т. д. промежутки времени будутъ

$$l_0+l,\quad l_0+3l,\quad l_0+5l,\quad l_0+7l,\ \ldots\ l_0+(2n-1)l.$$

§ 7. Ускореніе перемѣннаго движенія.

При перемѣнномъ движеніи скорости, какъ мы видѣли, мѣняются вообще непрерывно, т. е. для каждаго элемента пути, проходимаго точкою, существуетъ своя скорость, отличающаяся отъ скорости сосѣднихъ элементовъ какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Если скорости въ элементахъ пути отличаются другъ отъ друга только по величинѣ, то движеніе будетъ прямолинейное перемѣнное; если скорости отличаются другъ отъ друга, кромѣ величины, еще направленіемъ, или только однимъ направленіемъ, то движеніе будетъ криволинейное.

При движеніи прямолинейномъ направленія скоростей послѣдующихъ элементовъ совпадаютъ другъ съ другомъ. Поэтому каждая послѣдующая скорость можетъ быть разсматриваема, какъ алгебраическая сумма предыдущей скорости и нѣкоторой другой, прибавленной съ плюсомъ или минусомъ къ первой, въ томъ-же направленіи. Если мы знаемъ скорости въ каждомъ изъ элементовъ прямолинейнаго пути, то вышеупомянутыя прибавочныя скорости, или приращенія скоростей, найдутся съ помощію алгебраическаго вычитанія каждой скорости предыдущаго элемента изъ скорости послѣдующаго.

Представимъ себѣ нѣкоторое перемѣнное прямолинейное движеніе, и выберемъ рядъ послѣдовательныхъ положеній 1, 2, 3 и т. д. движущейся точки, отдѣленныхъ другъ отъ друга равными промежутками времени; въ каждомъ изъ этихъ положеній скорости точки будутъ вообще различны, какъ и во всѣхъ промежуточныхъ положеніяхъ. Обозначимъ упомянутыя скорости соотвѣтственно черезъ v_1, v_2, v_3 и т. д. Тогда очевидно, разности

$$v_2-v_1,\quad v_3-v_2,\quad v_4-v_3\ \ldots \text{ и т. д.}$$

будутъ равны нулю, если движеніе равномѣрное; будутъ равны между собою, если движеніе равномѣрно ускоренное, и будутъ различны, если движеніе вообще какое нибудь перемѣнное. Это заключеніе

остается въ силѣ, какъ-бы близко ни были другъ къ другу положенія 1, 2, и какъ-бы малы ни были промежутки времени ихъ отдѣляющіе, лишь-бы эти промежутки были равны между собою. Продолжая такимъ образомъ сближать положенія 1, 2, 3 и т. д. другъ съ другомъ, мы дойдемъ до ряда непосредственно слѣдующихъ другъ за другомъ элементовъ пути. Разности $v_2 - v_1$, $v_3, - v_2$ и т. д. сдѣлаются безконечно малы, но будутъ отличаться вообще другъ отъ друга при перемѣнномъ неравномѣрно ускоренномъ движеніи. Обозначимъ черезъ dv безконечно малую разность скоростей въ какихъ нибудь двухъ непосредственно другъ за другомъ слѣдующихъ элементахъ пути, черезъ dt—безконечно малое время, въ теченіи котораго проходится одинъ элементъ пути. Если-бы движеніе было равномѣрно ускоренное, то на слѣдующихъ элементахъ пути повторялось-бы тоже самое приращеніе скорости на величину dv; т. е. пройдя первый элементъ во время dt, движущаяся точка получила-бы приращеніе скорости dv; пройдя второй элементъ она получила-бы при равномѣрно ускоренномъ движеніи опять приращеніе скорости dv; слѣдовательно всего, по истеченіи времени $2dt$, получила-бы приращеніе $2dv$, и т. д. Такъ какъ по истеченіи единицы времени точка прошла-бы $\frac{1}{dt}$ элементовъ пути, получая на каждомъ приращеніе скорости dv, то къ концу единицы времени скорость возрасла-бы на $dv \frac{1}{dt}$, или на $\frac{dv}{dt}$, что и представляло-бы величину ускоренія описаннаго равномѣрно ускореннаго движенія. Но такъ какъ точка движется не равномѣрно ускоренно, то приращеніе скорости dv не будетъ одинаково въ различныхъ элементахъ; а слѣдовательно не будетъ одинаково частное $\frac{dv}{dt}$ (при чемъ элементы времени dt мы выбираемъ всѣ одинакими). Тѣмъ не менѣе мы можемъ однако опять разсматривать всякое новое $\frac{dv}{dt}$, какъ ускореніе, т. е. приращеніе скорости въ единицу времени, того равномѣрно ускореннаго движенія, которое имѣло-бы мѣсто, если-бы точка начала двигаться съ даннаго момента времени, получая черезъ каждый элементъ времени dt тоже самое приращеніе скорости dv, которое она получила въ послѣднемъ элементѣ пути.

Итакъ, мы можемъ составить себѣ слѣдующее представленіе о перемѣнномъ движеніи. Разбивая его на безконечно малые элементы времени, мы дойдемъ до такихъ промежутковъ времени, въ тече-

ніи которыхъ движеніе будетъ равномѣрное, съ особыми скоростями для каждаго промежутка. Соединяя упомянутые промежутки по парно, мы получимъ новые, тоже безконечно малые, промежутки времени, въ теченіи которыхъ движеніе можетъ быть разсматриваемо, какъ равномѣрно ускоренное, съ особымъ для каждаго промежутка ускореніемъ; величина этого послѣдняго будетъ

$$g = \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad g = \frac{d\frac{ds}{dt}}{dt}, \tag{13}$$

или по другому обозначенію

$$g = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{13)'$$

Слѣдовательно, всякое перемѣнное неравномѣрно ускоренное движеніе можно назвать **перемѣнноускореннымъ**, такъ какъ ускореніе въ немъ мѣняется отъ одного элемента времени къ другому. Изъ (13) мы видимъ также, что зная скорость, какъ функцію времени, мы разыскиваемъ ускореніе по скорости, какъ скорость по длинѣ пройденнаго пути. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1) Пусть зависимость между длиною пути и временемъ будетъ

$$s = at + bt^2;$$

тогда зависимость скорости отъ времени будетъ:

$$v = \frac{ds}{dt} = a + 2bt;$$

т. е. такъ выразится скорость, съ которою точка движется въ теченіи элемента времени, слѣдующаго за моментомъ времени t. Скорость въ концѣ времени $t + dt$ будетъ очевидно

$$v' = a + 2b(t + dt);$$

слѣдовательно приращеніе скорости въ теченіи элемента времени dt, слѣдующаго за моментомъ времени t, будетъ

$$dv = v' - v = 2b\,dt,$$

откуда ускореніе

$$g = 2b,$$

т. е. постоянно для всякаго времени.

2) Пусть

$$s = ct^n; \quad \text{тогда } v = cnt^{n-1}, \quad g = cn(n-1)t^{n-2}.$$

Такъ какъ при криволинейномъ движеніи скорости измѣняются отъ элемента пути къ элементу по направленію, то приращеніе скорости не можетъ быть находимо съ помощію алгебраическаго вычитанія, какъ въ случаѣ прямолинейнаго движенія.

Измѣненіе направленія и величины данной скорости мы можемъ представить себѣ, какъ результатъ приложенія къ этой послѣдней нѣкоторой новой скорости, отличной отъ первой по величинѣ и по направленію. Предположимъ, что точка, двигаясь по линіи AB (рис. 20) со скоростію AV_0, доходитъ до положенія B, и отсюда мѣняетъ свою прежнюю скорость на скорость BV_1. Такое измѣненіе можно себѣ представить, какъ результатъ приложенія къ прежней скорости нѣкоторой прибавочной скорости BU_1, которая, слагаясь съ первою AV_0, даетъ новую, какъ результирующую BV_1. Прибавочную скорость мы находимъ, вычитая геометрически изъ послѣдней скорости BV_1 первую AV_0. Слѣдовательно, откладываемъ обѣ скорости при одной точкѣ, положимъ B, сохраняя ихъ величины и направленія; на отложенныхъ линіяхъ BV_0' и BV_1 строимъ параллелограммъ такъ, чтобы уменьшаемое BV_1 было діагональю, а вычитаемое BV_0'—стороною; тогда сторона BU_1, прилегающая къ этой послѣдней, представитъ искомую добавочную скорость. Точно также, если новая скорость BV_1 при C измѣняется опять въ скорость CV_2, то мы, вычитая геометрически изъ послѣдней первую, найдемъ добавочную скорость CU_2, обусловливающую упомянутое измѣненіе, и т. д. Такимъ образомъ мы видимъ, что движеніе точки по ломанной линіи $ABCDE\ldots$ можно представить себѣ сопровождающимся послѣдовательными приращеніями скоростей: BU_1, CU_2, DU_3 и т. д., прибавляющимися къ прежнимъ скоростямъ въ точкахъ излома линіи.

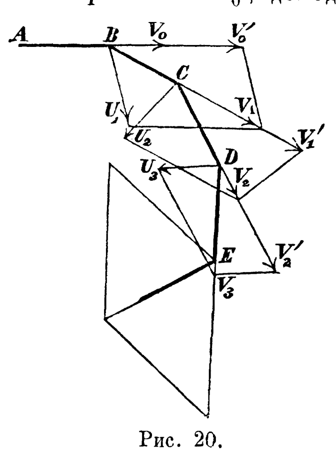


Рис. 20.

Если мы представимъ себѣ, что колѣна ломанной линіи дѣлаются все меньше и меньше, то число измѣненій скоростей будетъ дѣлаться

все болѣе и болѣе, а слѣдовательно—и число случаевъ приложенія добавочныхъ скоростей. Вообразивъ себѣ колѣна безконечно малыми, мы прійдемъ къ криволинейному перемѣнному движенію съ непрерывно измѣняющимися скоростями по величинѣ и направленію; каждое приращеніе скорости наступаетъ тогда по прошествіи безконечно малаго промежутка времени, въ теченіи котораго точка проходитъ по прямолинейному элементу своего пути; направленіе прилагаемыхъ на каждомъ элементѣ пути скоростей вообще не совпадаетъ съ направленіемъ движенія точки. Обозначимъ черезъ Δv безконечно малую величину геометрическаго приращенія скорости, которое получаетъ движущаяся точка, пройдя съ неизмѣняемою скоростію элементъ своего пути въ теченіи времени dt. Тогда $\frac{\Delta v}{dt}$ представитъ очевидно то приращеніе скорости, которое получила-бы движущаяся точка въ единицу времени, если-бы въ каждомъ изъ всѣхъ послѣдующихъ элементовъ времени, составляющихъ секунду, повторялось-бы тоже самое приращеніе скорости Δv *) по величинѣ и по направленію. Въ этомъ смыслѣ упомянутое частное можетъ быть названо у с к о р е н і е м ъ к р и в о л и н е й н а г о д в и ж е н і я. Слѣдовательно, обозначая черезъ g ускореніе при криволинейномъ движеніи, мы имѣемъ

$$g = \frac{\Delta v}{dt} \frac{\text{цент.}}{\text{сек.}^2}, \qquad (14)$$

такое-же выраженіе, какъ (13), съ тою только разницею, что здѣсь Δv не можетъ быть опредѣлено непосредственнымъ алгебраическимъ вычитаніемъ другъ изъ друга двухъ скоростей, а должно быть найдено геометрическимъ построеніемъ.

Однако опредѣленіе Δv легко свести къ алгебраическому вычитанію, т. е. къ опредѣленію приращеній скорости прямолинейнаго движенія. Дѣйствительно, мы знаемъ, что если движеніе точки намъ дано, то оно можетъ быть выражено въ видѣ трехъ прямолинейныхъ движеній ея проложеній по осямъ координатъ. Ускоренія по осямъ координатъ мы находимъ съ помощію алгебраическаго вычитанія двухъ безконечно близкихъ скоростей другъ изъ друга, и затѣмъ, по найденнымъ тремъ ускореніямъ, находимъ результирующее, какъ ихъ геометрическую сумму. Если движенія проложеній даны относительно

*) Буквою Δ мы будемъ отличать безконечно малое приращеніе величины, прилагающееся къ этой послѣдней геометрически.

прямоугольныхъ осей координатъ, какъ это бываетъ въ большинствѣ случаевъ, то результирующая скоростей или ускореній проложеній будетъ представлена діагональю прямоугольнаго параллелепипеда, построеннаго на слагающихъ скоростяхъ или ускореніяхъ, какъ на ребрахъ. Такъ какъ квадратъ этой діагонали равенъ суммѣ квадратовъ трехъ реберъ, то обозначая ускоренія по осямъ x—овъ, y—овъ и z—овъ соотвѣтственно черезъ g_x, g_y, g_z, а результирующее ускореніе—черезъ g, мы будемъ имѣть

$$g^2 = g_x{}^2 + g_y{}^2 + g_z{}^2, \tag{15}$$

гдѣ сумма берется алгебраически. Легко также видѣть, что косинусы угловъ ускоренія g съ осями координатъ будутъ соотвѣтственно

$$\frac{g_x}{g}, \quad \frac{g_y}{g}, \quad \frac{g_z}{g},$$

и что (15)′

$$g = g_x \dotplus g_y \dotplus g_z.$$

Обозначая черезъ v_x, v_y, v_z скорости проложеній по прямоугольнымъ осямъ координатъ, мы имѣемъ очевидно по (13):

$$g_x = \frac{dv_x}{dx}, \qquad g_y = \frac{dv_y}{dy}, \qquad g_z = \frac{dv_z}{dz}, \tag{16}$$

вслѣдствіе чего по (15):

$$g^2 = \left(\frac{\Delta v}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2$$

или по (15)′: (16)′

$$\frac{\Delta v}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \dotplus \frac{dv_y}{dt} \dotplus \frac{dv_z}{dt}.$$

Такъ какъ направленіе ускоренія при криволинейномъ движеніи не совпадаетъ съ направленіемъ движенія точки, то мы можемъ разложить его для каждаго элемента пути на два ускоренія: одно, совпадающее съ направленіемъ движенія, т. е. съ касательною къ траэкторіи, и другое, перпендикулярное къ этой касательной, т. е. направленное по нормали къ траэкторіи. Эти ускоренія могутъ быть названы: одно—касательнымъ или тангенціальнымъ, а другое—нормальнымъ.

Представимъ себѣ нѣкоторое безконечно малое приращеніе скорости BC (рис. 21), которое прибавляется къ скорости AB по

перпендикулярному къ ней направленію, и измѣняетъ ее въ скорость AC. Такъ какъ длина BC по предположенію безконечно мала, то эта линія можетъ быть разсматриваема, какъ элементъ круга, описаннаго радіусомъ BC. Но линія AC тогда должна будетъ представлять другой радіусъ того же круга; слѣдовательно мы будемъ имѣть $AB = AC$, откуда заключаемъ, что безконечно малое перпендикулярное приращеніе скорости измѣняетъ только направленіе скорости, но не ея величину. Точно также понятно, что ускореніе, перпендикулярное къ данной скорости, измѣнитъ въ теченіи безконечно малаго промежутка времени (пока приращеніе скорости имъ обусловливаемое остается тоже безконечно мало) только направленіе этой послѣдней, но не ея величину. Въ случаѣ криволинейнаго движенія вся скорость всегда перпендикулярна къ нормальному ускоренію, ибо точка движется по траэкторіи, т. е. послѣдовательно по безконечно малымъ отрѣзкамъ касательныхъ въ разныхъ элементахъ траэкторіи. Слѣдовательно, нормальное ускореніе не измѣняетъ величины скорости движенія точки (т. е. скорости по траэкторіи), измѣненіе которой обусловливается поэтому только тангенціальнымъ ускореніемъ. Съ другой стороны, если бы нормальное ускореніе не существовало, то все ускореніе совпадало бы постоянно съ направленіемъ движенія, которое было бы въ такомъ случаѣ прямолинейнымъ. Итакъ, тангенціальное ускореніе обусловливаетъ только измѣненіе величины скорости, нормальное—только измѣненіе направленія скорости.

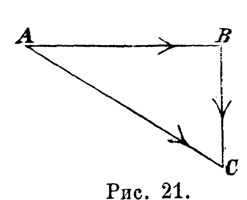


Рис. 21.

Если точка движется, напримѣръ, равномѣрно по кругу, то тангенціальное ускореніе очевидно равно нулю, а нормальное направлено въ разныя времена по радіусамъ, которые перпендикулярны къ касательнымъ.

Обозначимъ черезъ g_t и g_n величины тангенціальнаго и нормальнаго ускореній, а черезъ g, какъ прежде, величину полнаго ускоренія. Тогда очевидно

$$g = g_t + g_n\,, \tag{17}$$

$$g^2 = g_t^2 + g_n^2\,. \qquad (17)'$$

Опредѣляя величины скоростей въ двухъ сосѣднихъ элементахъ пути и вычитая ихъ алгебраически другъ изъ друга (предъидущую

скорость изъ послѣдующей), мы получимъ очевидно безконечно малое приращеніе величины скорости dv, т. е. приращеніе скорости по траэкторіи. Ускореніе по траэкторіи, т. е. тангенціальное ускореніе, будетъ поэтому $\frac{dv}{dt}$. Слѣдовательно, на основаніи (16) и (17), мы можемъ писать:

$$\frac{\Delta v}{dt}=\frac{dv_x}{dt}+\frac{dv_y}{dt}+\frac{dv_z}{dt}=\frac{dv}{dt}+g_n, \tag{18}$$

$$\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2=\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+g_n^2, \tag{18$'$}$$

при чемъ послѣднее—для случая, когда движеніе дано по прямоугольнымъ осямъ.

§ 8. Равномѣрное движеніе по кругу.

Въ видѣ примѣра на способъ разысканія ускоренія, опредѣлимъ величину ускоренія при равномѣрномъ движеніи по кругу.

Пусть r будетъ радіусъ даннаго круга, и v—скорость точки, движущейся по немъ равномѣрно. Обозначимъ черезъ T время полнаго обращенія точки по кругу. Такъ какъ въ теченіи этого времени точка проходитъ равномѣрно длину круга, равную $2\pi r$, то

$$vT=2\pi r,\text{ откуда } T=\frac{2\pi r}{v}. \tag{19}$$

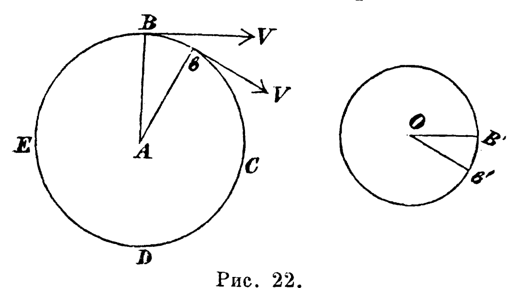


Рис. 22.

Будемъ проводить изъ точки O (рис. 22) линіи, равныя по величинѣ и направленію скоростямъ движущейся точки; т. е. всѣ скорости, которыя точка въ разныя времена имѣетъ на каждомъ элементѣ круга, отложимъ при O. Всѣ эти скорости будутъ равны между собою по величинѣ, но различны по направленію. Соединяя концы безчисленнаго множества такимъ образомъ отложенныхъ при точкѣ O линій непрерывною кривою, мы получимъ очевидно кругъ радіуса v.

Два безконечно близкіе радіуса этого вспомогательнаго круга, OB' и Ob', представятъ двѣ скорости BV и bV на двухъ сосѣднихъ элементахъ траэкторіи *). Прямая $B'b'$, которая, по безконечной близости радіусовъ OB' и Ob', совпадетъ съ элементомъ вспомогательнаго круга, будетъ представлять ту скорость, которую нужно придать къ OB', чтобы получить Ob'. Такъ какъ $B'b'$ перпендикулярна къ радіусу OB', то она будетъ перпендикулярна къ BV; кромѣ того направленіе отъ B' къ b' соотвѣтствуетъ очевидно направленію отъ B къ центру круга A. Итакъ, ускореніе направлено всегда къ центру круга. Величина этого ускоренія будетъ $\frac{B'b'}{dt}$, гдѣ dt есть время, въ продолженіи котораго скорость OB' измѣнилась въ Ob', а радіусъ вспомогательнаго круга, слѣдуя за движущеюся точкою и двигаясь съ нею равномѣрно, прошелъ длину $B'b'$. Время обращенія по своему кругу конца вспомогательнаго радіуса будетъ тоже самое T, что время обращенія данной движущейся точки по ея кругу. Длина вспомогательной окружности есть $2\pi v$. Слѣдовательно скорость движенія конца вспомогательнаго радіуса будетъ $\frac{2\pi v}{T}$, и стало быть:

$$B'b' = \frac{2\pi v}{T}\, dt, \text{ и, опредѣляя или } T, \text{ или } v \text{ по (19):}$$

$$B'b' = \frac{v^2}{r}\, dt = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\, dt,$$

откуда заключаемъ, что искомое ускореніе будетъ

$$g = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \tag{20}$$

Если дано не время оборота, но число n оборотовъ въ единицу времени, то

$$n = \frac{1}{T}, \text{ и } g = 4\pi^2 n^2 r. \tag{20'}$$

Найдемъ тоже ускореніе другимъ способомъ, указаннымъ въ концѣ предъидущаго параграфа: съ помощію ускореній проложеній.

Проведемъ черезъ центръ круга (рис. 23) двѣ взаимно перпендикулярныя линіи OY и OX, и вообразимъ движущуюся точку въ

*) Линіи BV и OB', bV и Ob' должны быть параллельны и равны другъ другу.

положеніи M. Уголъ, который направленіе скорости v образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси OX, обозначимъ черезъ (v,x); соотвѣтственный уголъ съ положительнымъ направленіемъ оси OY—черезъ (v,y). Тогда проложенія скорости v на оси будутъ:

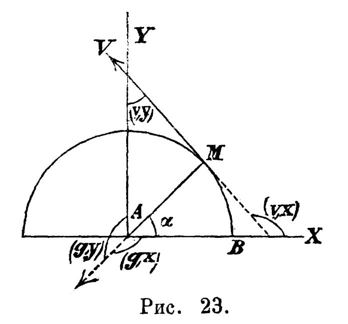


Рис. 23.

$$v_x = v\cos(v,x), \quad v_y = v\cos(v,y), \quad v_z = 0.$$

Или, обозначая черезъ α уголъ радіуса AM съ осью OX, и замѣчая, что очевидно

$$\cos(v,x) = -\sin\alpha, \quad \cos(v,y) = \cos\alpha,$$

имѣемъ:

$$v_x = -v\sin\alpha, \quad v_y = v\cos\alpha.$$

Будемъ считать время отъ момента, когда точка находилась въ B, на оси OX. Тогда очевидно, BM будетъ дуга, пройденная во время t, равная vt; но такъ какъ съ другой стороны $BM = \alpha r$, гдѣ r есть радіусъ круга, то

$$v_x = -v\sin\frac{v}{r}t, \qquad v_y = v\cos\frac{v}{r}t, \tag{21}$$

гдѣ величина $\frac{v}{r}$ноcитъ названіе угловой скорости точки около центра A. Ускоренія прямолинейныхъ движеній по линіямъ OX и OY находятся, какъ мы знаемъ, съ помощію алгебраическаго вычитанія другъ изъ друга двухъ безконечно близкихъ скоростей, въ два послѣдующіе другъ за другомъ элемента времени; т. е.

$$g_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{v\cos\frac{v}{r}(t+dt) - v\cos\frac{v}{r}t}{dt}$$

$$= -v\frac{2\sin\frac{v}{r}(t+\frac{dt}{2})\sin\frac{dt}{2}\frac{v}{r}}{dt}.$$

Но если dt будетъ сдѣлано меньше всякой данной величины, то очевидно

$$\sin\frac{v}{r}(t+\frac{dt}{2}) = \sin\frac{v}{r}t, \qquad \sin\frac{dt}{2}\frac{v}{r} = \frac{dt}{2}\frac{v}{r},$$

и слѣдовательно

$$g_y = -\frac{v^2}{r}\sin\frac{v}{r}\,t\,. \tag{22}$$

Точно такимъ же способомъ найдемъ:

$$g_x = -\frac{v^2}{r}\cos\frac{v}{r}\,t\,, \tag{22'}$$

и слѣдовательно:

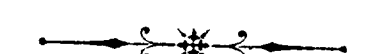
$$g^2 = g_y{}^2 + g_x{}^2 = \frac{v^4}{r^2}\,, \qquad \text{или } g = \frac{v^2}{r}\,; \tag{23}$$

а такъ какъ далѣе

$$\cos(g,x) = \frac{g_x}{g} = -\cos\alpha\,, \quad \text{т. е. } (g,x) = \pi - \alpha\,,$$

$$\cos(g,y) = \frac{g_y}{g} = -\sin\alpha\,, \quad \text{т. е. } (g,x) = \frac{\pi}{2} + \alpha\,,$$

то заключаемъ, что ускореніе направлено по радіусу къ центру.



Если точка движется по кругу съ перемѣнною скоростію, то мы, разсматривая это движеніе въ элементахъ, какъ равномѣрное, приходимъ къ заключенію о существованіи ускоренія, направленнаго къ центру и равнаго по величинѣ $\frac{v^2}{r}$, гдѣ v различно для различныхъ элементовъ окружности; вслѣдствіе чего нормальное ускореніе, направленное къ центру, будетъ также измѣняться со временемъ въ своей величинѣ. Но такъ какъ скорость по окружности при этомъ измѣняется, то кромѣ нормальнаго ускоренія существуетъ въ данномъ случаѣ—касательное, которое, слагаясь съ первымъ, даетъ полное ускореніе, уже не направленное къ центру.

Если путь движущейся точки представляетъ вообще какую нибудь кривую, то мы можемъ себѣ представить окружности, проходящія каждая черезъ три конца двухъ сосѣднихъ прямолинейныхъ элементовъ кривой, при чемъ радіусы этихъ окружностей будутъ вообще различны. Черезъ каждыя три такія безконечно близкія точки на кривой мы можемъ провести очевидно только одну окружность.

Всякая такая окружность, совпадающая двумя своими прямолинейными элементами съ двумя элементами кривой, называется соприкасательною (въ отличіе отъ касательной окружности, которая совпадаетъ съ кривою только однимъ своимъ элементомъ; причемъ черезъ два элемента кривой, опредѣляющіеся тремя точками, можно провести только одну соприкасательную окружность, а черезъ одинъ элементъ кривой, опредѣляющійся двумя точками,—безчисленное множество касательныхъ окружностей). Проведя соприкасательные круги черезъ каждую пару элементовъ кривой, мы всю кривую разобьемъ на рядъ дугъ, принадлежащихъ окружностямъ, съ различными радіусами, которые называются радіусами кривизны данной кривой. Движеніе точки по кривой можетъ такимъ образомъ разсматриваться какъ рядъ послѣдовательныхъ движеній по различнымъ окружностямъ. Ускореніе каждаго изъ этихъ движеній можетъ быть разложено на два: на ускореніе по направленію къ центру соприкасающейся окружности, центростремительное, и на ускореніе по самой окружности, т. е. по траэкторіи, которая въ разсматриваемыхъ элементахъ съ окружностію совпадаетъ. Первое ускореніе выразится черезъ $\frac{v^2}{r}$, гдѣ v есть скорость точки по траэкторіи для даннаго момента времени, а r—радіусъ соприкасающагося круга; второе ускореніе будетъ $\frac{dv}{dt}$. Слѣдовательно полное ускореніе g опредѣлится изъ формулы:

$$g^2 = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}\,. \qquad (24)$$

При перемѣнномъ движеніи по какой нибудь кривой, v и r вообще различны въ различныхъ положеніяхъ движущейся точки на ея пути. При движеніи перемѣнномъ по кругу, v различно, но r остается одно и тоже.

---

§ 9. Криволинейное движеніе, съ ускореніемъ постоянной величины и неизмѣннаго направленія.

Такъ какъ движеніе предполагается криволинейнымъ, то ускореніе не совпадаетъ съ направленіемъ движенія. Пусть O (рис. 24)

будетъ тотъ пунктъ пути, съ котораго мы начинаемъ разсматривать движеніе, и пусть Og будетъ по величинѣ и направленію представлять ускореніе, прилагающееся къ движущейся точкѣ въ этомъ мѣстѣ ея пути. Направленіе движенія точки по элементу пути, проходящему черезъ O, пусть будетъ представлено линіею OV_0, которая своею длиною и направленіемъ изобразитъ также скорость движущейся точки въ упомянутомъ элементѣ. Измѣненіе скорости движущейся точки обусловливается приращеніемъ скорости, прилагающимся въ направленіи ускоренія. Такъ какъ двѣ слагающіяся скорости даютъ результирующую очевидно въ той же самой плоскости, въ какой находятся сами, и такъ какъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ ускореніе по предположенію не измѣняетъ своего направленія для всѣхъ элементовъ пути, то точка будетъ двигаться въ плоскости, проходящей черезъ направленіе ускоренія Og и начальной скорости OV_0. Эту плоскость мы выберемъ за плоскость рисунка.

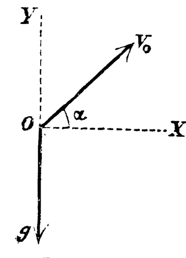


Рис. 24.

Въ плоскости рисунка, черезъ точку O проведемъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси координатъ OY и OX, изъ которыхъ первая, совпадая съ линіею Og, пусть направляется въ сторону противоположную ускоренію. Разсмотримъ, каково будетъ движеніе по этимъ линіямъ проложеній на нихъ движущейся точки. Такъ какъ ускореніе направлено перпендикулярно къ линіи OX, то его составляющая по этому направленію будетъ нуль, и движеніе по оси x—въ будетъ равномѣрное; т. е. величина проложенія скорости движущейся точки на ось OX въ различныхъ элементахъ ея пути будетъ одна и таже. Слѣдовательно, достаточно знать скорость въ одномъ какомъ нибудь элементѣ траэкторіи, чтобы опредѣлить движеніе проложенія движущейся точки по оси x—въ. Такая скорость намъ дана въ видѣ $v_0 = OV_0$, скорости начальнаго элемента. Если мы обозначимъ черезъ α уголъ, который OV_0 дѣлаетъ съ OX, то очевидно величина проложенія v_0 на OX, т. е. величина v_x, будетъ

$$v_x = v_0 \cos\alpha \,. \tag{25}$$

Длину пути, проходимаго точкою по OX, мы считаемъ отъ начала координатъ O; время t будемъ считать также отъ момента прохожденія точки черезъ O. Слѣдовательно длина пути, пройденнаго по оси x—овъ къ концу времени t, будетъ

$$x = v_0 \cos\alpha \,.\, t\,. \tag{26}$$

Такъ какъ ускореніе направлено въ противоположную сторону оси y—овъ, то обозначивъ его величину черезъ g, мы найдемъ, что ускореніе по оси y—овъ должно быть положено равнымъ—g. Смыслъ отрицательнаго знака при g тотъ, что прибавочная скорость, обусловливаемая ускореніемъ, должна вычитаться изъ скорости, направленной въ положительную сторону по OY. Первоначальная скорость точки по оси y—въ будетъ очевидно равна проложенію на эту ось скорости v_0, т. е. равна $v_0 \sin\alpha$. Черезъ промежутокъ времени t эта скорость, вслѣдствіе существованія постояннаго отрицательнаго ускоренія, будетъ

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt\,, \tag{27}$$

и движеніе будетъ равномѣрно укоснительное. Пространство, проходимое во время t точкою, движущеюся по линіи OY равномѣрно укоснительно (т. е. равномѣрно ускоренно съ отрицательнымъ ускореніемъ), будетъ по (9):

$$y = v_0 \sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2}\, gt^2\,. \tag{28}$$

Уравненія (26) и (28) вполнѣ опредѣляютъ движеніе точки при установленныхъ нами выше условіяхъ.

Уравненія (25) и (26) показываютъ, что движущаяся точка постоянно удаляется отъ линіи OY, отъ которой ея разстояніе увеличивается равномѣрно. Уравненія (27) и (28) показываютъ, что въ тоже самое время движущаяся точка сперва удаляется отъ линіи OX съ постоянно уменьшающеюся скоростію, которая наконецъ обратится въ нуль въ концѣ времени t_0 послѣ начала движенія. Это время найдется изъ ур. (27), въ которомъ мы должны положить $v_y = 0$ и $t = t_0$. Получаемъ:

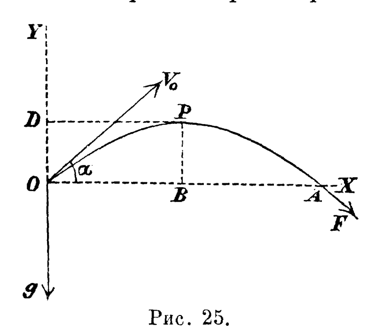


Рис. 25.

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt_0\,, \quad \text{откуда } t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,. \tag{29}$$

Въ теченіи элемента времени dt, слѣдующаго за моментомъ t_0, скорость точки по оси y—овъ будетъ нуль, т. е. ея проложеніе на мгновеніе остановится на этой линіи. Затѣмъ, когда будетъ $t > t_0$, то скорость v_y сдѣлается отрицательною и таковою останется при даль-

нѣйшемъ движеніи; т. е. движеніе будетъ направлено въ отрицательную сторону оси OY (по рисунку сверху внизъ), и точка будетъ приближаться опять къ линія OX. Разстояніе OD точки поворота отъ оси OX, которое мы обозначимъ черезъ y_0, найдется изъ уравн. (28), гдѣ мы должны положить $y = y_0$ и $t = t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Получаемъ:

$$y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}. \qquad (30)$$

Полагая $t = t_0$ въ ур. (26), мы найдемъ разстояніе $x_0 = OB$, на какомъ движущаяся точка во время поворота будетъ отъ линіи OY. Находимъ:

$$x_0 = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}. \qquad (31)$$

Скорость v точки по траэкторіи найдется изъ уравненія

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

которое на основаніи (25) и (27) обращается въ

$$v^2 = v_0^2 - 2v_0 g \sin\alpha \,.\, t + g^2 t^2. \qquad (32)$$

Для момента времени t_0 эта скорость обращается въ

$$v_0 \cos\alpha, \text{ т. е. въ } v_x.$$

Квадратъ скорости, слагаясь изъ квадрата постоянной скорости v_x^2 и квадрата перемѣнной скорости v_y^2, измѣняется съ этою послѣднею, сперва уменьшаясь до точки поворота, гдѣ скорость v_y, а слѣдовательно и v, достигаютъ своей наименьшей величины, и затѣмъ постоянно увеличиваясь.

Отъ точки поворота D проложеніе движущейся точки пойдетъ по линіи OY назадъ; сама же движущаяся точка отъ поворота P будетъ приближаться къ оси OX, и наконецъ ее пересѣчетъ. Время пересѣченія t_1 опредѣлится изъ ур. (28), въ которомъ мы должны положить $t = t_1$ и $y = 0$. Получимъ:

$$0 = v_0 \sin\alpha \,.\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = t_1 (v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1),$$

откуда

$$\text{или } t_1 = 0, \text{ или } t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 2t_0; \qquad (33)$$

т. е. движущаяся точка пересѣкаетъ ось x—овъ при началѣ движенія, потомъ черезъ промежутокъ времени t_0 достигаетъ наивысшаго положенія надъ этой осью, и черезъ такой же промежутокъ времени опять опускается до нея. Разстояніе отъ начала координатъ второй точки пересѣченія траэкторіи съ осью x—овъ мы получимъ изъ ур. (26), гдѣ должны положить $t = t_1$ [по (33)] и $x = x_1$, искомому разстоянію. Тогда будемъ имѣть:

$$x_1 = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = 2x_0 ; \tag{34}$$

т. е. обѣ точки пересѣченія лежатъ на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ вершины траэкторіи.

Скорость v_{y1} проложенія движущейся точки, когда оно вернется опять къ мѣсту исхода, найдется изъ ур. (27), гдѣ должно положить: $v_y = v_{y1}$ и $t = t_1$. Получимъ:

$$v_{y1} = v_0 \sin\alpha - 2v_0 \sin\alpha = - v_0 \sin\alpha , \tag{35}$$

вслѣдствіе чего скорость по траэкторіи во время t_1 будетъ

$$v_1 = v_0 , \tag{36}$$

т. е. та-же, что начальная скорость.

Наконецъ, исключая t изъ обоихъ уравненій (26) и (28), мы получаемъ, какъ было объяснено въ примѣчаніи къ § 1, уравненіе траэкторіи точки:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - x^2 \frac{g}{2v^2 \cos^2\alpha} , \tag{37}$$

которое, какъ учитъ насъ аналитическая геометрія, представляетъ параболу, кривую, получаемую отъ пересѣченія поверхности круглаго прямаго конуса плоскостію, параллельною одной изъ его образующихъ.

---

§ 10. Опредѣленіе длины пути по даннымъ скоростямъ.

Если скорость v движущейся точки въ теченіи какого нибудь элемента времени dt дана, то длина соотвѣтствующаго элемента пути ds опредѣлится, какъ пространство, проходимое равномѣрно со скоростію

v въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt, т. е. какъ произведеніе $v.dt$. Если даны скорости v_1, v_2, $v_3 \ldots\ldots v_n$ соотвѣтственно для каждаго изъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ элементовъ времени, на которые можетъ быть разбитъ какой нибудь конечный промежутокъ времени t, то длина пути s, проходимаго точкою въ теченіи упомянутаго промежутка времени съ перемѣнною скоростію, будетъ равна очевидно суммѣ пространствъ, проходимыхъ въ различные элементы времени, т. е.

$$s = v_1 dt + v_2 dt + v_3 dt \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot v_n dt, \tag{38}$$

гдѣ слагаемыхъ въ суммѣ будетъ безчисленное множество и каждое слагаемое, т. е. каждый членъ суммы будетъ безконечно малъ. Элементы, на которые мы дѣлимъ данный промежутокъ времени t, могутъ быть выбраны произвольной величины, лишь бы они были безконечно малы; такъ напримѣръ, мы можемъ ихъ выбрать безконечно малыми и равными другъ другу. Въ такомъ случаѣ элементы пути, т. е. произведенія $v_1 dt$, $v_2 dt$ и т. д., будутъ тоже безконечно малы, ибо v_1, v_2 не безконечно велики; но эти произведенія уже не будутъ произвольны, а каждое будетъ въ опредѣленное число разъ болѣе величины элемента времени.

Интегральное исчисленіе учитъ насъ, какимъ образомъ находить сумму, состоящую изъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ слагаемыхъ, измѣняющихся по извѣстному данному закону. Возможность нахожденія суммъ такого рода, какъ (38), мы пояснимъ нѣсколькими примѣрами.

Если движеніе равномѣрное, то очевидно $v_1 = v_2 = v_3 \cdot\cdot\cdot = v_n$. Слѣдовательно, выраженіе (38) обращается въ

$$s = v \,.\, ndt,$$

гдѣ v обозначаетъ постоянную скорость движенія, а n представляетъ число (безконечно большое) безконечно малыхъ промежутковъ времени, на которые мы дѣлимъ весь данный конечный промежутокъ времени t. Слѣдовательно $n.dt = t$, и

$$s = vt\,.$$

Пусть движеніе будетъ равномѣрноускоренное, и скорость къ концу времени t выражается черезъ

$$v = v_0 + gt.$$

Тогда скорость въ начальномъ элементѣ, т. е. для времени $t=0$, будетъ v_0; длина соотвѣтствующаго элемента пути будетъ v_0dt, т. е. длина пути, проходимаго въ промежутокъ времени dt, слѣдующій за моментомъ $t=0$. Къ концу времени dt скорость будетъ v_0+gdt; длина пути, проходимаго съ этою скоростію будетъ $(v_0+gdt)dt$. Къ концу времени $2dt$ скорость будетъ v_0+g2dt; длина пути, проходимаго съ этою скоростію въ слѣдующій за временемъ $2dt$ промежутокъ времени dt, будетъ $(v_0+g2dt)dt$. Наконецъ длина пути, проходимаго въ послѣдній n—ный элементъ времени, слѣдующій за моментомъ $(n-1)dt$, будетъ $[v_0+g(n-1)dt]dt$. Слѣдовательно длина пути, проходимаго во всѣ n элементовъ времени, т. е. во все время t, будетъ

$$s=v_0dt+(v_0+gdt)\,dt+(v_0+g2dt)\,dt+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot[v_0+g\,(n-1)\,dt]\,dt$$
$$=v_0ndt+g(dt)^2(1+2+3+\cdot\cdot\cdot\cdot n-1).$$

Такъ какъ сумма натуральныхъ чиселъ, до числа N, выражается черезъ $\frac{1}{2}\,(N+1)N$, то наша предъидущая формула обратится въ

$$s=v_0ndt+\frac{1}{2}\,gdt^2n\,(n-1)$$
$$=v_0ndt+\frac{1}{2}\,g\,(ndt)^2-\frac{1}{2}\,gndt^2,$$

или такъ какъ $ndt=t$, то

$$s=v_0t+\frac{1}{2}\,gt^2-\frac{1}{2}\,gt\,.\,dt;$$

но dt можетъ быть сдѣлано меньше всякой данной величины; слѣдовательно

$$s=v_0t+\frac{1}{2}\,gt^2,$$

т. е. извѣстная уже намъ формула (9).

Очевидно, что, для опредѣленія длины пройденнаго пути, намъ достаточно знать только величину скорости для каждаго элемента пути, но не ея направленіе. Но длина пройденнаго пути, безъ данной его формы, не опредѣляетъ вполнѣ движенія. Если же намъ даны всѣ три проложенія скорости на данныя оси координатъ, то находя пространства, проходимыя точкою по осямъ координатъ, мы опредѣляемъ тѣмъ самымъ, для всякаго момента въ данномъ промежуткѣ времени, ея положенія въ пространствѣ; слѣдовательно вполнѣ опредѣляемъ ея движеніе въ упомянутомъ промежуткѣ времени. Кромѣ скорости—при этомъ намъ очевидно должна быть дана та точка въ пространствѣ, отъ которой

движеніе начинается, или отъ которой мы начинаемъ разсматривать движеніе.

Пусть x_0, y_0, z_0 будутъ координаты движущейся точки для времени $t=0$; пусть v_x, v_y, v_z будутъ слагающія скорости по осямъ координатъ, данныя для каждаго момента извѣстнаго промежутка времени, отъ $t=0$ до $t=t$, т. е. выраженныя какъ функціи времени. Тогда, обозначая для краткости алгебраическую сумму вида (38), взятую по элементамъ времени между упомянутыми выше предѣлами 0 и t, черезъ $\sum_0^t vdt$, мы будемъ имѣть слѣдующія выраженія для координатъ движущейся точки во время t:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum_0^t v_x dt, \\ y &= y_0 + \sum_0^t v_y dt, \\ z &= z_0 + \sum_0^t v_z dt. \end{aligned} \tag{39}$$

Выраженія (39) суть очевидно уравненія движенія, рѣшающія вполнѣ задачу о нахожденіи положенія движущейся точки въ любое время t.

Произведеніе скорости на время, какъ вообще всякое количество, составленное изъ двухъ множителей, можетъ быть представлено графически въ видѣ площади нѣкотораго прямоугольника, числовая величина сторонъ котораго равна соотвѣтственно числовымъ величинамъ того и другаго изъ производителей. Дѣйствительно, вообразимъ себѣ прямоугольникъ, основаніе котораго заключаетъ въ себѣ столько единицъ длины, сколько данное время t сек. — единицъ времени, а высота котораго заключаетъ въ себѣ столько единицъ длины, сколько данная скорость $v\,\frac{\text{цент.}}{\text{сек.}}$ — единицъ скорости. Тогда площадь такого прямоугольника будетъ равна $v.t$, и будетъ заключать въ себѣ столько единицъ площади (т. е. цент.^{2}), сколько пространство s цент., проходимое равномѣрно во время t со скоростію v, содержитъ единицъ длины.

Такъ какъ всякое перемѣнное движеніе можетъ быть представлено въ своихъ элементахъ равномѣрнымъ, то пространство, проходимое въ каждый элементъ времени dt, можетъ быть выражено площадью прямоугольника, съ основаніемъ dt и высотою, равною v, т. е.

скорости въ соотвѣтствующемъ элементѣ. Сумма площадей безчисленнаго множества такихъ безконечно узкихъ прямоугольниковъ (рис. 26) выразитъ пространство, проходимое въ опредѣленный конечный промежутокъ времени. Эта сумма представитъ площать, заключенную между прямой Ot, двумя перпендикулярными къ ней прямыми OV_0 и tV, и ломаною линію V_0V, которая, съ уменьшеніемъ промежутковъ dt, обратится въ непрерывную кривую, называемую кривою скоростей. Если дано какое нибудь соотношеніе, опредѣляющее каждую скорость v по каждому данному времени t (т. е. если v дана въ функціи t), то кривая скоростей построится также, какъ всякая вообще кривая, для которой дано соотношеніе между координатами ея точекъ (см. § 1). Слѣдовательно при построеніи выраженія

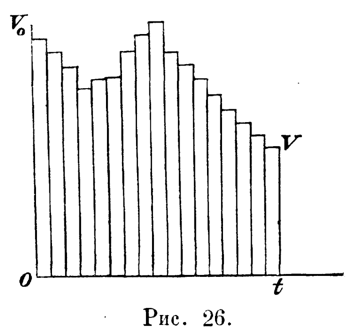


Рис. 26.

$$v = f(t)$$

мы должны разсматривать всякое t, какъ координату x (абсциссу) какой либо точки плоской кривой, а v—какъ соотвѣтствующую координату y (ординату).

Для равномѣрноускореннаго движенія, гдѣ

$$v = v_0 + gt\,,$$

кривая скоростей будетъ прямою линіей. Дѣйствительно, построивши (рис. 27) абсциссу t и ординаты v_0 и v, мы проведемъ линію v_0v_0, параллельно Ot; затѣмъ построимъ ординату v', соотвѣтствующую абсциссѣ t'. Такъ какъ

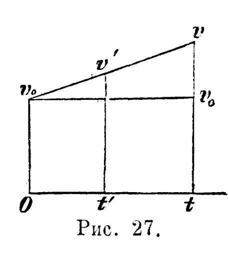


Рис. 27.

$$v' = v_0 + gt',$$

то

$$\frac{v - v_0}{v' - v_0} = \frac{t}{t'}\,;$$

послѣдняя пропорція показываетъ, что точка v' лежитъ всегда на третьей сторонѣ прямоугольнаго треугольника v_0v_0v; слѣдовательно линія скоростей, между v_0 и v, есть прямая.

Площадь фигуры Ov_0vt, состоя изъ прямоугольника Ov_0v_0t и прямоугольнаго треугольника v_0vv_0, будетъ равна

$$v_0t + \frac{1}{2}(v - v_0)t = \frac{v_0 + v}{2}t$$

или

$$= v_0t + \frac{1}{2}gt^2, \tag{39'}$$

и выразитъ пространство, пройденное равномѣрно ускоренно во время t, съ ускореніемъ g и съ начальною скоростію v_0.

Сводя опредѣленіе пройденнаго пространства на вычисленіе площадей, мы тѣмъ не избѣгаемъ однако суммованія безконечно малыхъ величинъ, ибо для опредѣленія площадей, ограниченныхъ кривыми линіями, мы имѣемъ только одинъ способъ—разбивать эти площади на безконечно малыя части, которыя можно-бы было разсматривать, какъ ограниченныя прямыми линіями. Только площади фигуръ, ограниченныхъ прямыми линіями, мы можемъ непосредственно сравнивать, при помощи наложенія, съ принятою нами единицею площади (т. е. съ квадратомъ, стороны котораго равняются единицѣ длины) или съ конечными частями этой единицы. Слѣдовательно, только при равномѣрно ускоренномъ движеніи мы можемъ опредѣлить пройденное пространство непосредственно безъ помощи суммованія безконечно малыхъ путей.

Тѣмъ не менѣе сведеніе опредѣленія пути къ опредѣленію площади можетъ имѣть ту выгоду, что при вычисленіи площади мы можемъ разбивать ее на безконечно малыя части разнообразными способами, выбирая при этомъ такой способъ разбиванія, при которомъ суммованіе частей можетъ быть произведено всего легче. Напримѣръ предположимъ, что зависимость скорости отъ времени представлена уравненіемъ

$$v = \sqrt{a^2 - t^2}, \tag{40}$$

для промежутка времени между $t = 0$ и $t = a$. Для опредѣленія пространства, пройденнаго точкою отъ начала движенія, т. е. отъ $t = 0$, до какого нибудь момента между 0 и a, намъ нужно-бы было искать такую сумму безконечно малыхъ величинъ:

$$\sqrt{a^2}.dt + \sqrt{(a^2 - dt)^2}.dt + \sqrt{a^2 - (2dt)^2}.dt + \cdots \sqrt{a^2 - (ndt)^2}.dt. \tag{41}$$

Не выполняя непосредственно суммованія, мы посмотримъ сперва, къ

опредѣленію площади какой кривой сводится нахожденіе искомаго пространства.

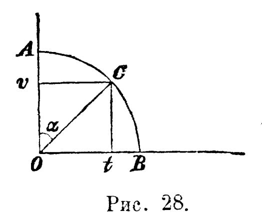


Рис. 28.

Строя кривую по ур. (40), мы видимъ, что скорость въ началѣ, при $t=0$, имѣетъ наибольшую величину a, которая на рисункѣ (рис. 28) выразится линіею OA; затѣмъ скорость уменьшается и при $t=a$ (на рис.: OB) дѣлается равна нулю. Для какого нибудь промежуточнаго момента времени, опредѣляемаго абсциссою Ot, мы вычисляемъ ординату tC или Ov по ур. (40):

$$Ov=\sqrt{a^2-Ot^2}\,,\ \text{откуда}\ Ov^2+Ot^2=a^2=OC^2\,;$$

слѣдовательно разстояніе OC какой либо точки на кривой скоростей отъ начала координатъ всегда равно a, откуда заключаемъ, что кривая AB есть дуга круга, радіуса a, центръ котораго въ O. Искомое пространство, для времени $t=Ot$, выразится суммою площадей прямоугольнаго треугольника OCt и сектора круга AOC, причемъ каждая изъ площадей, составляющихъ эту сумму, уже не будетъ имѣть непосредственнаго кинематическаго значенія.

Для опредѣленія площади сектора мы, какъ извѣстно, разбиваемъ дугу AC на безчисленное число n прямолинейныхъ элементовъ, длина каждаго изъ которыхъ будетъ $\frac{AC}{n}$; вслѣдствіе этого секторъ AOC разобьется на безконечное множество треугольниковъ; основаніемъ каждаго изъ нихъ будетъ элементъ дуги, а высотою—радіусъ круга; каждая такая элементарная площадь будетъ очевидно равна $\frac{a}{2}\cdot\frac{AC}{n}$; сумма изъ n такихъ площадей будетъ $\frac{1}{2}a\,.\,AC$. При этомъ опять, площади элементарныхъ треугольниковъ, суммованіемъ которыхъ мы находимъ площадь сектора, не имѣютъ никакого непосредственнаго кинематическаго значенія, въ родѣ того, какъ элементарныя площади, съ помощію которыхъ могутъ быть представлены члены суммы (41). Обозначимъ черезъ α уголъ AOC, т. е. длину дуги, которая описана изъ точки O радіусомъ единицею въ томъ-же углѣ AOC. Тогда очевидно, $AC=a\,.\,\alpha$, и площадь сектора $=\frac{1}{2}a^2\alpha$. Слѣдовательно искомое пространство s выразится такъ:

$$s=\frac{1}{2}\,Ot\,.\,tC+\frac{1}{2}\,a^2\alpha\,,$$

или такъ какъ

$$tC = v = \sqrt{a^2 - t^2},$$

то

$$s = \frac{1}{2}\, t \,.\, \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{1}{2}\, a^2 \alpha\,,$$

причемъ

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Ot}{Ov} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\,,$$

$$\sin \alpha = \frac{t}{a}\,, \qquad \cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{a}\,.$$

Если извѣстны тригонометрическія количества sin, cos, tg, относящіяся къ какому нибудь углу α, то уголъ этотъ мы считаемъ вполнѣ опредѣленнымъ и изображаемъ такимъ образомъ: если

$$\sin \alpha = a\,, \qquad \cos \alpha = b\,, \qquad \operatorname{tg} \alpha = c\,,$$

то

$$\alpha = \operatorname{arc}.\sin a = \operatorname{arc}.\cos b = \operatorname{arc}.\operatorname{tg} c\,,$$

что обозначаетъ: дуга α есть такая, которой sin есть a, cos есть, b и т. п. Слѣдовательно мы можемъ писать:

$$s = \frac{1}{2}\, t \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{1}{2}\, a^2 \operatorname{arc}.\sin \frac{t}{a}\,. \tag{42}$$

§ 11. Опредѣленіе движенія по даннымъ ускореніямъ.

Предположимъ, что намъ дано ускореніе g_1 для элемента времени dt, слѣдующаго за моментомъ времени начала движенія, направленное по траэкторіи движущейся точки; тогда величина скорости точки къ концу этого элемента времени возрастаетъ на величину $g_1 dt$, и если для предыдущаго элемента времени скорость была v_0, то для послѣдующаго—она будетъ $v_0 + g_1 dt$; если затѣмъ будетъ дано ускореніе g_2 (тоже тангенціальное) для элемента времени, слѣдующаго за моментомъ dt, отъ начала движенія, то къ концу этого элемента скорость возрастетъ еще на $g_2 dt$, и въ теченіи слѣдующаго элемента, т. е. до конца времени $2dt$, она будетъ $v_0 + g_1 dt + g_2 dt$, и т. д.. Такимъ образомъ, черезъ нѣкоторое безконечно большое число n безконечно малыхъ промежутковъ времени dt, изъ которыхъ состоитъ нѣкоторый конечный промежутокъ времени, отъ начала движенія,

начальная скорость увеличится на

$$g_1 dt + g_2 dt + g_3 dt + \cdot \cdot \cdot \cdot g_{n-1} dt + g_n dt\,, \tag{43}$$

и эта сумма, будучи придана къ скорости первоначальнаго элемента (съ котораго мы начинаемъ разсматривать движеніе), выразитъ скорость въ теченіи элемента времени dt, слѣдующаго за промежуткомъ $ndt = t$, отъ начала движенія. Суммованіе (43) опять можетъ быть приведено къ нахожденію площади кривой ускореній, которая строится по уравненію

$$g = f(t)\,,$$

выражающему зависимость g отъ времени, причемъ различныя времена откладываются какъ абсциссы, а соотвѣтствующія величины g—какъ ординаты. Вообще мы видимъ, что скорость по даннымъ тангенціальнымъ ускореніямъ находится съ помощію такихъ-же суммованій, какъ проходимое пространство—по даннымъ скоростямъ. Изъ (43) легко видѣть, что если ускореніе g будетъ постоянно, то приращеніе величины скорости будетъ, черезъ промежутокъ времени t, gt, а самая скорость, если v_0 будетъ начальная ея величина:

$$v_0 + gt\,.$$

Если ускореніе (тангенціальное) возрастаетъ пропорціонально времени и вообще будетъ

$$g = a + bt\,,$$

то, при начальной скорости v_0:

$$v = v_0 + at + \frac{1}{2}bt^2,$$

и т. п.

Такъ какъ, по даннымъ тангенціальнымъ ускореніямъ, первоначальной скорости и положенію точки исхода, мы можемъ опредѣлить только величину скорости по траэкторіи и длину пройденнаго пространства, то вообще движеніе не опредѣляется вполнѣ выше упомянутыми данными, ибо остается еще неизвѣстною форма пути. Дляполнаго опредѣленія движенія намъ нужно знать, кромѣ величины скорости, еще ея направленіе въ каждомъ элементѣ, т. е. другими словами, направленіе каждаго элемента траэкторіи. Величину и направленіе скорости мы будемъ знать, когда она дана намъ своими тремя слагающими по осямъ координатъ (обыкновенно прямоугольнымъ), ибо тогда мы знаемъ не

только величину діагонали, представляющей результирующую этихъ скоростей, но и ея направленіе:

$$\left[\text{ибо тогда } v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2 \text{ и } \cos(v,x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(v,y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(v,z) = \frac{v_z}{v}\right]. \tag{44}$$

Для того-же, что-бы знать всѣ три скорости по осямъ координатъ мы должны знать всѣ три ускоренія, т. е. полное ускореніе, данное его тремя слагающими.

Итакъ, движеніе вполнѣ опредѣлено, когда даны заразъ: 1) положеніе точки исхода, 2) скорость первоначальнаго элемента, по величинѣ и направленію (т. е. обыкновенно—ея слагающія по осямъ координатъ) и 3) полное ускореніе для каждаго элемента времени, по величинѣ и направленію (т. е. опять его слагающія по осямъ координатъ).

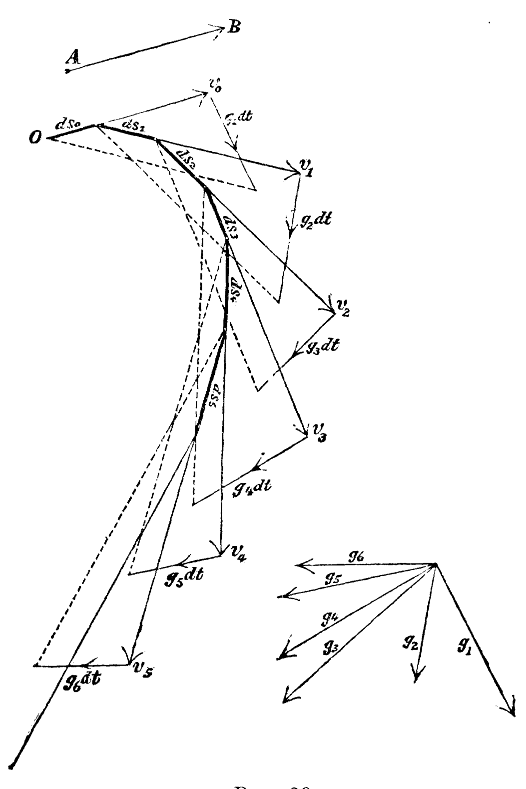


Рис. 29.

Пусть напримѣръ точка O (рис. 29) представляетъ собою начало движенія, линія $AB = v_0$, по величинѣ и направленію,—скорость начальнаго элемента, линіи g_1, g_2, g_3 ...... — ускоренія въ концахъ перваго, втораго и т. д. элементовъ. Найдемъ послѣдовательнымъ построеніемъ элементовъ путь движущейся точки. Какъ обыкновенно, опредѣляемъ элементы пути въ томъ предположеніи, что каждый изъ нихъ проходится въ равныя, но безконечно малыя, времена dt. Линія Ov_0, параллельная и равная AB, отложенная отъ точки O, даетъ направленіе перваго элемента траэкторіи. Длина перваго элемента будетъ $ds_0 = v_0 dt$. Затѣмъ линія, параллельная и равная g_1, дастъ направленіе приращенія ско-

рости въ концѣ перваго элемента времени; длина g_1dt, отложенная на этой линіи, дастъ величину этого приращенія; діагональ параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ v_0 и g_1dt дастъ, по величинѣ и направленію, скорость v_1 во второмъ элементѣ пути; длина этого элемента будетъ $ds_1 = v_1dt$. Затѣмъ, такимъ же образомъ складывая скорости v_1 и g_2dt, опредѣляемъ скорость v_2 третьяго элемента и его длину $ds_2 = v_2dt$, и т. д. Такимъ образомъ построимъ, элементъ за элементомъ, весь путь точки. Возможность описаннаго построенія показываетъ, что вышеприведенныя данныя вполнѣ опредѣляютъ движеніе. Но мы не имѣемъ средствъ производить безчисленное множество геометрическихъ сложеній, не выполняя дѣйствительно безконечнаго числа построеній діагоналей параллелограммовъ; поэтому мы сводимъ опредѣленіе движенія по траэкторіи къ разысканію движеній по прямолинейнымъ осямъ координатъ, при каждомъ изъ которыхъ ускоренія направлены по линіямъ движенія; тогда сложенія скоростей сводятся къ алгебраическимъ суммованіямъ, которыя выполнять мы можемъ, какъ-бы ни было велико число членовъ суммы. Въ § 9 мы имѣли примѣръ подобнаго рода изслѣдованія, гдѣ мы, по данному ускоренію проложеній, по начальной скорости и по данной точкѣ исхода, опредѣляли движеніе.

Обозначимъ черезъ v_x^0, v_y^0, v_z^0 данныя первоначальныя скорости по осямъ координатъ, черезъ g_x, g_y, g_z—ускоренія по тѣмъ-же осямъ, представленныя какъ функціи времени. Тогда скорости v_x, v_y, v_z, которыя будетъ имѣть по осямъ координатъ движущаяся точка къ концу времени t, представятся такимъ образомъ:

$$v_x = v_x^0 + \Sigma\, g_x dt\,,$$
$$v_y = v_y^0 + \Sigma\, g_y dt\,, \qquad (45)$$
$$v_z = v_z^0 + \Sigma\, g_z dt\,;$$

гдѣ суммы берутся по всѣмъ элементамъ времени въ промежуткѣ отъ $t = 0$ до $t = t$. Опредѣливъ изъ (45) скорости въ зависимости отъ времени t, мы съ помощію урр. (39) найдемъ положеніе точки относительно данныхъ осей для всякаго времени, т. е. рѣшимъ вполнѣ задачу о движеніи.

§ 12. Кинематика неизмѣняемой системы точекъ.

Совокупность нѣсколькихъ движущихся точекъ называется вообще *системою* движущихся точекъ. Если каждая точка системы можетъ передвигаться независимо отъ другихъ точекъ той-же системы, т. е. такъ, какъ будто-бы этихъ послѣднихъ не было, то система называется *системою свободныхъ точекъ*. Если какое нибудь перемѣщеніе одной точки обусловливаетъ собою перемѣщенія другихъ точекъ, то система называется системою *несвободныхъ* или *связанныхъ точекъ*. Система несвободныхъ точекъ можетъ быть сама по себѣ *свободною* или *несвободною*, смотря по тому, можетъ или не можетъ такая система перемѣщаться во всѣ стороны, заразъ всѣми своими точками одинаково и безъ измѣненія относительнаго ихъ расположенія. Твердое тѣло въ пространствѣ представляетъ примѣръ *свободной системы связанныхъ точекъ*; твердое тѣло на плоскости—примѣръ *несвободной системы связанныхъ точекъ*.

Какова-бы ни была система точекъ, всякое ея движеніе мы можемъ разсматривать, какъ состоящее изъ двухъ: однаго общаго всѣмъ точкамъ, и другаго—относительнаго, въ сравненіи съ какою нибудь произвольно выбранною точкою той-же системы. Дѣйствительно, скорость каждой точки для каждаго момента времени мы можемъ раскладывать на двѣ, изъ которыхъ одна будетъ равна по величинѣ и направленію скорости нѣкоторой произвольно выбранной точки системы, и будетъ для всѣхъ точекъ, стало быть, одна и таже, а другая вообще для разныхъ точекъ будетъ различна; первая скорость обусловитъ одно изъ вышеупомянутыхъ двухъ движеній, вторая—другое. Очевидно, что только относительное движеніе точекъ системы зависитъ отъ характера ея *связности*, и при изученіи этого движенія мы можемъ одну изъ точекъ системы разсматривать, какъ неподвижную.

Неизмѣняемою системою называется такая, точки которой не могутъ измѣнять своихъ взаимныхъ разстояній. Точки абсолютно твердаго тѣла представляютъ примѣръ такого рода системы. Слѣдовательно въ ней должны также оставаться неизмѣнными разстоянія ея точекъ: 1) отъ всякой точки неизмѣнно связанной съ системой, 2) отъ какой нибудь прямой, проведенной между любыми двумя точками, или принадлежащими къ системѣ, или вображаемыми, но

съ нею неизмѣнно связанными, 3) отъ плоскости, проведенной черезъ любыя три точки, принадлежащія системѣ или съ оною неизмѣнно связанныя. Слѣдовательно, если мы вообразимъ нѣкоторыя оси координатъ, неизмѣннымъ образомъ связанныя съ системою, т. е. проходящія всегда черезъ однѣ и тѣже ея точки (очевидно четыре точки опредѣлятъ три такія оси вполнѣ), то координаты точекъ системы относительно этихъ осей, при всякомъ движеніи системы, останутся неизмѣнными.

Такъ какъ изученіе тѣхъ родовъ движенія всякой системы, которые характеризуются свойствами связности этой послѣдней, сводится къ изученію движеній ея точекъ около одной неподвижной, но произвольно выбранной, то мы и обратимся прежде всего къ движенію неизмѣняемой системы около неподвижной точки. Пусть O будетъ нѣкоторая неподвижная точка системы; тогда всякая другая точка A можетъ около нея двигаться не иначе, какъ оставаясь отъ O на неизмѣнномъ разстояніи. Всѣ точки, лежащія на поверхности сферы радіуса OA, около точки O, должны оставаться на этой сферѣ, перемѣщаясь только по ея поверхности. Вообразимъ какія нибудь двѣ точки A и B (рис. 30), лежащія на этой поверхности; послѣ какого нибудь перемѣщенія (конечнаго или безконечно малаго) положеніе этихъ точекъ на той-же сферѣ будетъ A' и B'. Дуги большихъ круговъ (центръ которыхъ въ O), проведенныхъ отъ A къ B и отъ A' къ B', будутъ очевидно равны между собою, такъ какъ разстоянія между точками системы неизмѣнны *). Соединимъ дугами большихъ круговъ точки A съ A' и B съ B'; черезъ середины этихъ дугъ, E и F, проведемъ опять большіе круги, перпендикулярно къ AA' и BB'. Тогда очевидно, каждая точка круга EC будетъ одинаково отстоять отъ точекъ A и A'; точно также каждая точка круга FC будетъ одинаково отстоять отъ B и B'. Слѣдовательно, для точки C пересѣченія дугъ EC и EF, мы будемъ имѣть: $AC = A'C$ и $BC = B'C$, откуда заключаемъ, что сферическій треугольникъ ABC при наложеніи совпадетъ съ треугольникомъ $A'B'C$. Такъ какъ разстоянія точки C отъ обѣихъ точекъ A и B остаются одни и тѣже, до и послѣ перемѣщенія, то эта точка должна

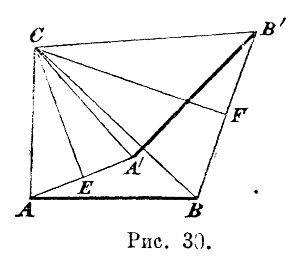


Рис. 30.

*) Плоскость рисунка мы должны представить себѣ поверхностію сферы, и прямыя линіи—дугами большихъ круговъ.

принадлежать къ неизмѣняемой системѣ; кромѣ того мы видимъ, что, при данномъ перемѣщеніи фигуры ABC, точка C остается неподвижною. Другою неподвижною точкою при данномъ перемѣщеніи будетъ очевидно другой конецъ діаметра сферы, проходящаго черезъ точку C. Слѣдовательно, къ концу даннаго перемѣщенія одинъ изъ діаметровъ разсматриваемой сферы, или вообще одна изъ прямыхъ линій, проходящихъ черезъ O, не измѣнитъ своего положенія. Если-бы, кромѣ перемѣщеніи точекъ A и B, мы обратили вниманіе на перемѣщеніе какой нибудь другой пары точекъ, совершающееся совмѣстно съ первымъ, то опредѣляя положеніе неподвижной точки на сферѣ по вышеуказанному способу, мы пришли-бы непремѣнно къ той-же самой неподвижной линіи, которая опредѣлена перемѣщеніемъ первыхъ двухъ точекъ. Дѣйствительно, неподвижность какой нибудь другой линіи обусловила-бы также неподвижность плоскости, проходящей черезъ обѣ неподвижныя линіи, а слѣдовательно—и неподвижность всей системы. Стало быть, при данномъ перемѣщеніи неизмѣняемой системы около точки, можетъ оставаться неподвижною только одна линія, которая проходитъ черезъ неподвижную точку. Такъ какъ разстоянія точекъ отъ этой линіи должны быть неизмѣнны, то движеніе системы должно состоять во вращеніи ея точекъ около упомянутой линіи. Итакъ, всякое перемѣщеніе точекъ неизмѣняемой системы около неподвижной точки можетъ быть произведено вращеніемъ системы около нѣкоторой неподвижной оси.

Представимъ себѣ рядъ послѣдовательныхъ перемѣщеній неизмѣняемой системы около неподвижной точки. Положенія, въ которыя приходитъ послѣдовательно система, вслѣдствіе этихъ перемѣщеній, обозначимъ какъ 1, 2, 3 и т. д. до N. Переходъ системы изъ каждаго предыдущаго положенія въ послѣдующее можетъ быть совершенъ съ помощію движенія системы около нѣкоторой оси, причемъ для каждаго перемѣщенія, вообще говоря, можетъ найтись своя ось вращенія. Такимъ образомъ мы будетъ имѣть рядъ послѣдовательныхъ вращеній около различныхъ осей, проходящихъ черезъ одну неподвижную точку. Но съ другой стороны, перемѣщеніе изъ положенія 1 въ положеніе N можетъ быть произведено непосредственно тоже вращеніемъ системы около нѣкоторой оси. Слѣдовательно, рядъ вращеній неизмѣняемой системы около произвольнаго числа осей, проходящихъ черезъ неподвижную точку, мы можемъ замѣнить въ ре-

зультатѣ вращеніемъ около одной оси, и на оборотъ—вращеніе около одной оси представить, какъ результатъ послѣдовательныхъ вращеній около различныхъ произвольно выбранныхъ осей.

Если движеніе системы около неподвижной точки мы представимъ себѣ, какъ рядъ послѣдовательныхъ положеній, отдѣленныхъ другъ отъ друга безконечно малыми промежутками времени, то движеніе системы въ каждый изъ такихъ безконечно малыхъ промежутковъ времени будетъ состоять во вращеніи около нѣкоторой оси, проходящей черезъ неподвижную точку. Слѣдовательно, всякое непрерывное движеніе неизмѣняемой системы около неподвижной точки можно представить, какъ рядъ послѣдовательныхъ вращеній около осей, проходящихъ черезъ неподвижную точку и непрерывно измѣняющихъ свое направленіе Къ тому-же представленію мы можемъ прійти и другимъ путемъ. Въ § 8 мы видѣли, что всякую траэкторію точки можно представить себѣ, какъ рядъ безконечно малыхъ круговыхъ дугъ, положеніе центровъ которыхъ и величина радіусовъ для каждаго элемента траэкторіи различны *); слѣдовательно, движеніе всякой точки по ея траэкторіи можно представить себѣ, какъ рядъ безконечно малыхъ ея вращеній по элементамъ различныхъ круговъ кривизны. Такимъ образомъ, движеніе каждой точки неизмѣняемой системы можетъ быть представлено, какъ рядъ вращеній по кругамъ кривизны ея траэкторіи; въ теченіи даннаго элемента времени, стало быть, каждая точка системы движется по своему кругу. Но пока точка движется по кругу, центръ его и самая движущаяся точка представляютъ нѣкоторую неизмѣняемую систему; слѣдовательно, всѣ центры круговъ въ теченіи даннаго элемента времени неизмѣнно связаны съ точками системы. А такъ какъ эти центры, принадлежа такимъ образомъ къ неизмѣняемой системѣ, остаются неподвижными, то они должны всѣ или находиться въ одной точкѣ, или лежать на прямой, проходящей черезъ эту точку. Сходиться въ одну точку всѣ центры вращенія не могутъ, ибо въ такомъ случаѣ мы могли-бы найти всегда такія точки, которыя двигались-бы по двумъ кругамъ, плоскости которыхъ пересѣкаются, вслѣдствіе чего измѣнялось-бы разстояніе между этими точками. Поэтому остается одно

*) Прямая линія при этомъ представится напримѣръ, какъ рядъ дугъ, радіусы которыхъ безконечно велики, а центры удалены въ безконечность.

возможное расположеніе центровъ кривизны—по прямой линіи. Такая прямая линія называется мгновенною осью вращенія системы.

Длина путей, проходимыхъ точками системы при данномъ вращеніи этой послѣдней около какой либо оси, будетъ различна; но уголъ вращенія, т. е. уголъ между двумя линіями, представляющими разстоянія данной точки отъ оси вращенія, до и послѣ перемѣщенія, будетъ очевидно для всѣхъ точекъ одинъ и тотъ-же, ибо въ противномъ случаѣ разстоянія между точками системы должны-бы были измѣняться. Если уголъ вращенія мы обозначимъ черезъ α, то длина пути, пройденная при этомъ точкою, находящеюся на разстояніи r отъ оси вращенія, будетъ представлена длиною дуги круга, описанной радіусомъ r въ углѣ α, т. е. черезъ $r\alpha$. Если вращеніе около данной оси совершается такимъ образомъ, что въ равные и произвольно выбранные промежутки времени система поворачивается на равные углы, то вращеніе называется равномѣрнымъ. Уголъ, на который система повернется, или повернулась-бы, при равномѣрномъ вращеніи въ единицу времени, называется угловою скоростію около данной оси. Всякое неравномѣрное вращеніе мы можемъ представить себѣ, какъ состоящее изъ ряда равномѣрныхъ вращеній, продолжающихся, каждое, безконечно малый промежутокъ времени и имѣющихъ различныя угловыя скорости. Если мы обозначимъ черезъ $d\alpha$ безконечно малый уголъ, на который повернется система въ теченіи безконечно малаго времени dt около данной оси, то угловая скорость ω около этой оси будетъ очевидно

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{46}$$

Путь ds, проходимый точкою, лежащею на разстояніи r отъ оси вращенія, будетъ очевидно

$$ds = rd\alpha = r \,.\, \omega dt\,; \tag{47}$$

скорость этой точки на ея траэкторіи будетъ

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega \,.\, r. \tag{48}$$

Слѣдовательно, если угловая скорость системы дана, то извѣстны скорости всѣхъ ея точекъ, находящихся на данныхъ разстояніяхъ отъ данной оси вращенія. Такъ какъ уголъ представляется всегда

отвлеченнымъ числомъ, выражающимъ отношеніе длины дуги къ длинѣ радіуса, то единица угла будетъ пройдена радіусомъ, когда онъ опишемъ дугу, равную ему по длинѣ (т. е. уголъ въ $57^0\,14'\,44''.77\ldots.$). Если такой уголъ будетъ пройденъ въ одну секунду, то угловая скорость будетъ равна единицѣ. Изъ выраженія (46) очевидно, что

$$\text{един. угл. скор.} = \frac{1}{\text{сек.}} \cdot \tag{49}$$

Если слѣдовательно мы обозначимъ черезъ ω числовую величину угловой скорости, то полное выраженіе ея будетъ $\omega\frac{1}{\text{сек.}}$ или $\omega\,(\text{сек.})^{-1}$. Вращеніе около данной оси, а вмѣстѣ съ нимъ и угловая скорость, считаются положительными, когда для наблюдателя, смотрящаго отъ отрицательнаго конца оси къ положительному, вращеніе представляется идущимъ по стрѣлкѣ часовъ, какъ это представлено на рис. (31). Такъ напримѣръ, если мы примемъ, что положительное направленіе (отъ конца (—) къ концу (+)) земной оси идетъ отъ юга къ сѣверу, то вращеніе отъ запада къ востоку будетъ положительнымъ, и на оборотъ, принимая это вращеніе за положительное, мы должны отрицательный конецъ оси вращенія отнести къ югу.

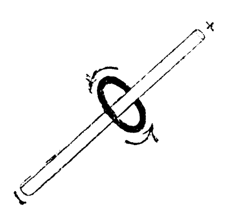


Рис. 31.

Представимъ себѣ такое движеніе неизмѣняемой системы около неподвижной точки, при которомъ не происходитъ никакихъ внезапныхъ скачковъ или рѣзкихъ измѣненій въ направленіи путей точекъ системы и ихъ скоростей. Кривизна путей точекъ системы при такомъ движеніи должна измѣняться непрерывно, т. е. безконечно малыми скачками; другими словами, тѣ круги, по безконечно малымъ дугамъ которыхъ происходитъ движеніе точекъ системы, въ теченіи каждаго изъ ряда безконечно малыхъ промежутковъ времени, должны постепенно переходить одинъ въ другой, такъ что каждый кругъ послѣдующаго момента долженъ только безконечно мало разниться отъ круга предыдущаго момента, какъ по величинѣ радіуса, такъ по положенію центра и всей своей плоскости. Только черезъ конечный промежутокъ времени, т. е. безконечно большое число безконечно малыхъ промежутковъ, кругъ, по которому точка двигалась въ началѣ промежутка, можетъ отличаться конечнымъ образомъ отъ круга, по которому точка движется въ кон-

цѣ упомянутаго промежутка. Въ такомъ случаѣ положеніе мгновенной оси вращенія будетъ измѣняться тоже постепенно; т. е. если въ теченіи даннаго безконечно малаго промежутка времени система вращалась около опредѣленной прямой, то въ слѣдующій безконечно малый промежутокъ времени она будетъ вращаться около линіи безконечно близкой къ первой, и только черезъ конечный промежутокъ времени положеніе мгновенной оси измѣнится конечнымъ образомъ, т. е. послѣдняя будетъ образовать съ начальною осью конечный уголъ, и угловая скорость вокругъ нея будетъ отличаться на конечную величину отъ первоначальной. Если мы отмѣтимъ внутри неизмѣняемой системы рядъ мгновенныхъ осей для послѣдовательныхъ элементовъ времени, составляющихъ нѣкоторый конечный промежутокъ времени, то оси эти, непрерывно переходя другъ въ друга, образуютъ нѣкоторую коническую поверхность K (рис. 32), вообще сомкнутую или разомкнутую, вершина которой находится въ неподвижной точкѣ O, и образующія которой суть последовательныя оси вращенія. Этотъ конусъ мы должны очевидно разсматривать, какъ неизмѣнно связанный съ данною системою, и перемѣщающійся вмѣстѣ съ нею при ея вращеніи около точки O При каждомъ изъ послѣдовательныхъ мгновенныхъ вращеній системы, только одна изъ образующихъ конуса K останется неподвижною, становясь мгновенною осью вращенія; остальныя-же образующія будутъ перемѣщаться. Поэтому положеніе оси вращенія въ пространствѣ (напр. относительно неподвижныхъ осей координатъ) будетъ тоже измѣняться со временемъ, и сама ось будетъ описывать въ пространствѣ конусъ L, вершина котораго будетъ находиться тоже въ O. Части конуса L слѣдовательно описываются различными образующими конуса K, и при томъ, каждою изъ нихъ послѣдовательно въ продолженіи того времени, въ теченіи котораго эта образующая продолжаетъ оставаться осью вращенія. Мы можемъ такимъ образомъ сказать, что конусъ L описывается въ пространствѣ осью вращенія, составленною въ разныя времена изъ разныхъ точекъ системы. При каждомъ мгновенномъ вращеніи одна изъ образующихъ конуса K, становясь осью, дѣлается также образующею конуса L. Слѣдовательно. движеніе неизмѣняемой системы около точки O вообще будетъ состоять въ томъ, что конусъ K, неизмѣн-

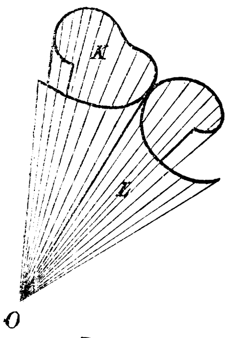


Рис. 32.

но связанный съ системою, будетъ катиться безъ скольженія по конусу L, неподвижному въ пространствѣ.

Если оба конуса, неподвижный L и катящійся K, суть круглые, то движеніе называется вообще прецессіональнымъ вращеніемъ. При этомъ движеніи, оси обоихъ конусовъ C и O (рис. 33) очевидно всегда находятся въ одной плоскости съ мгновенною осью вращенія, B, проходящею черезъ мѣсто прикосновенія конусовъ. Эта плоскость очевидно вращается около оси C; такое ея движеніе называется прецессіей, а ея угловая скорость—угловою скоростію прецессіи. Скорость прецессіи и угловая скорость системы около мгновенной оси находятся въ постоянномъ отношеніи другъ къ другу. Дѣйствительно, обозначимъ первую и вторую изъ упомянутыхъ угловыхъ скоростей соотвѣтственно черезъ Ω и ω, и вообразимъ какую нибудь точку P, лежащую на оси OO катящагося конуса (рис. 34). Эта точка вращается въ данный моментъ около мгновенной оси OR; слѣдовательно ея скорость должна выразиться черезъ $\omega . PN$; но съ другой стороны мы можемъ разсматривать, что эта точка въ тоже самое мгновеніе вращается около оси OC неподвижнаго конуса съ угловою скоростію Ω; слѣдовательно ея скорость можетъ быть также выражена произведеніемъ $\Omega . PE$, гдѣ PE есть ея разстояніе отъ оси OC; такъ какъ оба произведенія выражаютъ одну и туже скорость, то $\omega . PN = \Omega . PE$. Если мы обозначимъ черезъ Φ уголъ между образующею и осью неподвижнаго конуса, а черезъ φ—тотъ-же уголъ для катящагося конуса, то очевидно, что

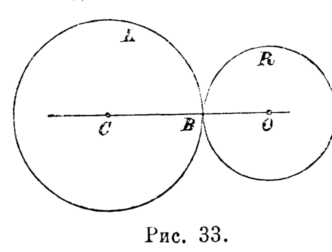


Рис. 33.

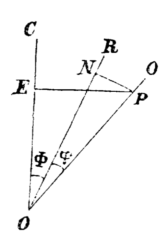


Рис. 34.

$$PN : PE = \sin\varphi : \sin(\Phi + \varphi) \, ;$$

слѣдовательно

$$\omega : \Omega = \sin(\Phi + \varphi) : \sin\varphi \, . \qquad (50)$$

Если конусъ K приходится внутри конуса L (рис. 35), то очевидно

$$\omega : \Omega = \sin(\Phi - \varphi) : \sin\varphi \, , \qquad (51)$$

причемъ ω и Ω имѣютъ различные знаки. Къ этому случаю относится вращеніе земли около ея центра,

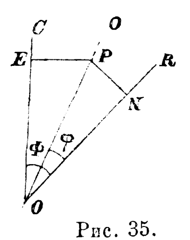


Рис. 35.

причемъ $\Phi = 23^0\,27'\,28''$, а $\varphi = 0''.00867$; время обращенія со скоростію ω равно звѣзднымъ суткамъ, а со скоростію Ω—25868 годамъ. Если наконецъ L приходится внутри K (рис. 36), то

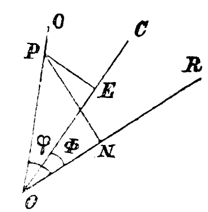


Рис. 36.

$$\omega : \Omega = \sin(\varphi - \Phi) : \sin\varphi\,. \qquad (52)$$

Мы уже знаемъ, что каждое вращеніе около опредѣленной оси можетъ быть разсматриваемо какъ результатъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ вращеній около различныхъ осей; эти послѣднія мы можемъ назвать слагающими или составляющими вращеніями, а вращеніе ихъ замѣняющее—результирующимъ.

---

§ 13. Сложеніе угловыхъ скоростей.

Разсмотримъ соотношенія между величинами составляющихъ и результирующихъ вращеній въ томъ предположеніи, что тѣ и другія безконечно малы и совершаются въ безконечно малыя времена.

Прежде всего замѣтимъ слѣдующее. Пусть нѣкоторая точка системы послѣдовательно вращается съ нею около нѣсколькихъ осей, расположенныхъ какъ угодно, и вообще не проходящихъ черезъ одну точку; пусть угловыя скорости около этихъ осей будутъ $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, а разстоянія отъ осей вышеупомянутой точки будутъ $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$. Если точка повернется въ теченіи безконечно малаго времени dt около первой оси, то ея перемѣщеніе будетъ равно $r_1\omega_1 dt$. Если оси мы намѣтимъ неподвижно въ пространствѣ, то послѣ перваго вращенія разстоянія перемѣщенной точки отъ намѣченныхъ неподвижныхъ линій, долженствующихъ сдѣлаться въ послѣдующіе моменты осями вращенія, тоже измѣнятся, но очевидно—безконечно мало. Пусть эти разстоянія сдѣлаются равными $r_2 + d^{\rm I}r_2$, $r_3 + d^{\rm I}r_3 \cdots r_n + d^{\rm I}r_n$. Тогда перемѣщеніе точки, вслѣдствіе ея вращенія около второй оси во время dt, будетъ

$$\omega_2(r_2 + d^{\rm I}r_2)\,dt,$$

и т. д. Такъ что, когда совершатся вращенія около всѣхъ осей, кромѣ послѣдней, то разстояніе точки отъ n—ной оси, вслѣдствіе этихъ вращеній, сдѣлается

$$r_n + d^{\rm I}r_n + d^{\rm II}r_n + d^{\rm III}r_n + \cdots d^{n-1}r_n\,,$$

гдѣ $d^{\rm I}r_n$, $d^{\rm II}r_n \ldots d^{n-1}r_n$ суть безконечно малыя приращенія разстоянія r_n, вслѣдствіе перваго, втораго и т. д. вращеній.

Если наконецъ точка повернется въ теченіи времени dt около послѣдней оси, то ея перемѣщеніе, вслѣдствіе этого вращенія, будетъ

$$(r_n + d^{I}r_n + d^{II}r_n + d^{III}r_n + \cdots d^{n-1}r_n)\,\omega_n dt;$$

ея скорость во время этого перемѣщенія получится, когда мы предъидущее выраженіе раздѣлимъ на dt; тогда будемъ имѣть:

$$\omega_n r_n + \omega_n (d^{I}r_n + d^{II}r_n + \cdots d^{n-1}r_n).$$

Если число осей не безконечно велико, то конечная сумма безконечно малыхъ величинъ, въ скобкахъ ( ), будетъ тоже безконечно мала; а слѣдовательно будетъ также безконечно мало произведеніе изъ этой суммы и конечной величины ω_n. Такимъ образомъ, второй членъ послѣдняго выраженія, съ безпредѣльнымъ уменьшеніемъ промежутка времени dt, можетъ быть сдѣланъ меньше всякой данной величины и въ предѣлѣ можетъ быть принятъ равнымъ нулю. Слѣдовательно, скорость точки, во время послѣдняго вращенія, можетъ быть принята равною $\omega_n r_n$, а длина ея перемѣщенія—равною $\omega_n r_n dt$, т. е. такою же, какою она была бы, если бы n—ное вращеніе совершилось перывымъ въ ряду данныхъ вращеній. Отсюда заключаемъ, что результатъ каждаго изъ конечнаго ряда безконечно малыхъ вращеній будетъ одинъ и тотъ же, въ какомъ бы порядкѣ они ни совершались. Слѣдовательно, въ результатѣ эти вращенія можно разсматривать такъ, какъ будто они совершаются одновременно. Не должно упускать изъ виду, что это заключеніе относится только къ безконечно малымъ вращеніямъ и только къ конечному числу (не безконечно большому) таковыхъ.

Представимъ себѣ двѣ оси вращенія OA и OB (рис. 37), на которыхъ стрѣлками обозначимъ ихъ положительное направленіе; предположимъ, что система вращается въ теченіи однаго элемента времени dt около оси OA, съ угловою скоростію ω_1, а въ теченіи слѣдующаго такого же элемента времени dt—около другой оси OB, со скоростію ω_2. Найдемъ положеніе такой оси, вращеніе около которой въ теченіи такого же промежутка времени dt сообщило бы точкамъ неизмѣняемой системы такія же перемѣщенія, какъ оба первыя послѣдовательныя вращенія, и опредѣлимъ

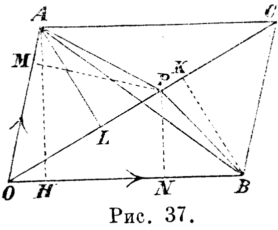


Рис. 37.

угловую скорость этого результирующаго вращенія. Перемѣщенія точекъ будутъ происходить по элементамъ круговъ около той или другой оси, и могутъ, по своей безконечной малости, быть приняты за прямолинейныя. Положительное вращеніе около той или другой оси выдвинетъ точки, лежащія въ плоскости рисунка по лѣвую сторону отъ оси, впередъ изъ этой плоскости, а точки, лежащія по правую сторону, отодвинетъ за плоскость; слѣдовательно только для точекъ, лежащихъ въ плоскости между обѣими осями, перемѣщенія отъ того и другаго вращенія будутъ противоположны другъ другу; перемѣщенія всѣхъ другихъ точекъ, лежащихъ внѣ двухъ противулежащихъ угловъ, образуемыхъ обѣими парами одноименныхъ концовъ осей, будутъ совпадать другъ съ другомъ, направляясь одинаково заразъ въ ту или другую сторону. Тѣ точки, перемѣщенія которыхъ отъ обоихъ вращеній ω_1 и ω_2, будучи прямо противоположны другъ другу, будутъ также и равны, вовсе не перемѣстятся послѣ упомянутыхъ вращеній; а слѣдовательно должны будутъ лежать на искомой оси результирующаго вращенія. Эти точки должны очевидно находиться въ плоскости обѣихъ осей OA и OB, и въ углѣ, образованномъ ихъ одноименными концами. Если точка P лежитъ внутри угла AOB, а PM и PN суть ея разстоянія отъ осей OA и OB, то перемѣщеніе точки P, вслѣдствіе вращенія около OA въ теченіи dt, будетъ равно $PM\,.\,\omega_1\,.\,dt$ и направлено по перпендикуляру къ плоскости рисунка, за эту плоскость; перемѣщеніе той же точки, отъ вращенія около OB, въ теченіи такого же времени dt, будетъ равно $PN\,.\,\omega_2\,dt$ и направлено по тому же перпендикуляру, впередъ отъ плоскости. Если точка P лежитъ на оси, то должно быть

$$PM\,\omega_1\,dt = PN\,\omega_2\,dt\,. \tag{53}$$

Отложимъ на обѣихъ данныхъ осяхъ длины AO и BO, равныя соотвѣтственно скоростямъ ω_1 и ω_2; тогда равенство (53) обращается въ

$$PM \cdot OA = PN \cdot OB\,, \tag{54}$$

и выражаетъ, что площади треугольниковъ OAP и OBP равны. Опуская на линію OP перпендикуляры AL и BK, мы можемъ выразить равенство тѣхъ же площадей иначе:

$$OP \cdot AL = OP \cdot BK, \quad \text{откуда } AL = BK\,. \tag{55}$$

Черезъ точку A проведемъ линію, параллельную OB, до встрѣчи ея

съ OP въ точкѣ C, и соединимъ C съ B. Тогда площади треугольниковъ OAC и OBC, выражаясь черезъ $OC \cdot AL$ и $OB \cdot BK$, будутъ на основаніи (55) равны. Отсюда слѣдуетъ, что $BC = AO$ и что обѣ эти линіи параллельны. Такимъ образомъ, направленіе результирующей оси совпадаетъ съ діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ угловыхъ скоростяхъ, отложенныхъ по соотвѣтствующимъ осямъ. Такъ какъ точка A, лежащая на оси OA, не перемѣщается отъ вращенія системы около OA, то ея перемѣщенія, при вращеніи системы около осей OB или OC, должны быть равны; слѣдовательно, если AH и AL будутъ ея разстоянія отъ этихъ осей, то

$$\omega_1 \cdot AH = \omega \cdot AL \quad \text{или} \quad OB \cdot AH = \omega \cdot AL, \tag{56}$$

гдѣ ω есть искомая скорость около OC. Но $OB \cdot AH$ представляетъ площадь треугольника OAB, которая равна площади треугольника OAC; слѣдовательно

$$OB \cdot AH = OC \cdot AL = \omega \cdot AL, \text{ или } \omega = OC; \tag{57}$$

т. е. длина упомянутой діагонали представитъ величину искомой результирующей угловой скорости. Итакъ вообще: угловыя скорости, отложенныя по соотвѣтствующимъ одноименнымъ осямъ, слагаются, какъ обыкновенныя скорости. Умѣя складывать двѣ угловыя скорости, мы можемъ сложить ихъ произвольное число, и, повторяя тѣже разсужденія, какъ при сложеніи обыкновенныхъ скоростей, прійдемъ къ заключенію, что результирующая угловая скорость, по своей величинѣ и по направленію своей оси, находится, какъ заключительная сторона многоугольника, построеннаго на данныхъ слагающихъ угловыхъ скоростяхъ, отложенныхъ по направленію соотвѣтствующихъ осей.

Поэтому результатъ всякаго вращенія около мгновенной оси, въ теченіи элемента времени, мы можемъ разсматривать, какъ рядъ вращеній около какого угодно числа осей, причемъ каждое вращеніе совершается въ такой же элементъ времени, какъ разлагаемое вращеніе. Каждое мгновенное вращеніе мы можемъ слѣдовательно разлагать на три, совершающіяся около трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, или остающихся въ пространствѣ въ неизмѣнномъ направленіи, или все равно вращающихся вмѣстѣ съ системою. Если ω_1, ω_2, ω_3

будутъ угловыя скорости вокругъ этихъ трехъ осей, для даннаго момента времени, а ω—скорость вокругъ результирующей оси, то очевидно

$$\omega^2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2 , \tag{58}$$

причемъ углы α, β, γ, которые результирующая ось образуетъ съ тремя прямоугольными слагающими, опредѣлятся изъ уравненій

$$\cos\alpha = \frac{\omega_1}{\omega}, \qquad \cos\beta = \frac{\omega_2}{\omega}, \qquad \cos\gamma = \frac{\omega_3}{\omega}. \tag{59}$$

Зная для каждаго элемента времени слагающія угловыя скорости около трехъ неизмѣнныхъ по направленію осей, мы будемъ знать положеніе мгновенной оси и ея угловую скорость; слѣдовательно будемъ знать скорость любой точки системы, лежащей на опредѣленномъ разстояніи отъ оси; т. е. движеніе системы намъ будетъ вполнѣ извѣстно.

Предположимъ теперь, что послѣдовательныя безконечныя вращенія совершаются около параллельныхъ осей. Пусть OA и OB (рис. 38) будутъ двѣ параллельныя оси, направленныя въ одну сторону; угловыя скорости ихъ пусть будутъ ω_1 и ω_2. Тогда точки, получающія отъ обоихъ вращеній противоположныя перемѣщенія, будутъ лежать въ плоскости обѣихъ осей и между этими послѣдними. Для какой нибудь такой точки P, лежащей на разстояніяхъ r_1 и r_2 отъ осей, перемѣщеніе, отъ вращенія въ теченіи элемента времени dt около первой оси, будетъ $\omega_1 r_1 dt$; соотвѣтствующее перемѣщеніе отъ вращенія ω_2 будетъ $\omega_2 r_2 dt$, и будетъ направлено противоположно первому, по перпендикуляру къ плоскости рисунка. Очевидно, для всѣхъ точекъ, лежащихъ на линіи, параллельной обѣимъ осямъ, перемѣщенія будутъ одинаковы; если же линія есть результирующая ось, то

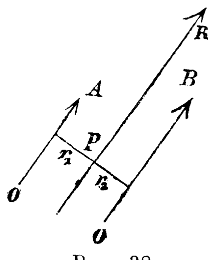


Рис. 38.

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 ; \qquad r_1 : r_2 = \omega_2 : \omega_1 ; \tag{60}$$

т. е. результирующая ось лежитъ въ плоскости обѣихъ составляющихъ, между ними, на разстояніяхъ отъ нихъ, обратно пропорціональныхъ ихъ угловымъ скоростямъ.

Пусть ω будетъ скорость вокругъ направленія результирующей оси, идущаго въ одну сторону со слагающими. Такъ какъ перемѣщеніе какой нибудь точки на одной изъ слагающихся осей должно быть одно и тоже, отъ вращеній около двухъ другихъ, то

$$r_1\omega = (r_1 + r_2)\,\omega_2 \quad \text{и} \quad r_2\omega = (r_1 + r_2)\,\omega_1\,,$$

откуда (61)

$$\omega = \omega_1 + \omega_2\,;$$

т. е. угловая результирующая скорость равна суммѣ угловыхъ слагающихъ скоростей.

Зная какъ складывать двѣ угловыя скорости, мы очевидно можемъ послѣдовательнымъ сложеніемъ найти результирующую ось для произвольнаго числа параллельныхъ одноименныхъ составляющихъ осей. Результирующая угловая скорость будетъ при этомъ очевидно равна суммѣ слагающихъ скоростей.

Если оси A и B (рис. 39) направлены въ разныя стороны, то на основаніи подобныхъ же разсужденій, какъ въ предъидущемъ случаѣ, мы прійдемъ къ заключенію, что результирующая ось лежитъ въ плоскости слагаемыхъ осей и по одну какую нибудь отъ нихъ сторону. Если опять r_1 и r_2 будутъ разстоянія результирующей оси отъ данныхъ составляющихъ осей, то очевидно, какъ прежде

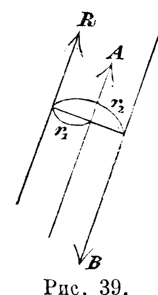


Рис. 39.

$$r_1\,\omega_1 = r_2\,\omega_2\,, \tag{62}$$

откуда видимъ, что если $\omega_1 > \omega_2$, то $r_2 > r_1$, и наоборотъ; а такъ какъ ось R лежитъ внѣ осей A и B, то она должна лежать на сторонѣ той изъ осей A и B, которой угловая скорость больше. Кромѣ того, такъ какъ перемѣщенія точекъ на одной изъ слагающихъ осей, отъ вращеній около двухъ другихъ, должны быть равны и противоположны, то

$$r_1\omega = (r_2 - r_1)\,\omega_2 \quad \text{и} \quad r_2\omega = (r_2 - r_1)\,\omega_1\,,$$

откуда (63)

$$\omega = \omega_1 - \omega_2\,.$$

Слѣдовательно, для обоихъ случаевъ можемъ сказать, что результирующая угловая скорость двухъ данныхъ вращеній, около параллельныхъ осей, направленныхъ въ одну или разныя стороны, равна алгебраи-

ческой суммѣ скоростей около составляющихъ осей, причемъ знаки слагающихъ одинаковы, если оси одноименны, и разные въ противномъ случаѣ. Разстоянія результирующей оси отъ составляющихъ всегда обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ этихъ послѣднихъ.

Если въ (63) $\omega_1 = \omega_2$, то $\omega = 0$; слѣдовательно, двѣ оси, съ равными и обратными другъ другу угловыми скоростями, не имѣютъ результирующей оси. Разсмотримъ скорости, обусловливаемыя такими осями въ точкахъ плоскости рисунка. Будемъ считать положительными скорости, направленныя отъ наблюдателя смотрящаго на рисунокъ. Тогда для точки, лежащей вправо отъ обѣихъ осей A и B $(\omega_1 = \omega_2 = \Omega)$, на разстояніяхъ r_1 и r_2, мы будемъ имѣть скорости:

$$\begin{gathered} \text{отъ вращ. } A: \quad \Omega r_1, \qquad \text{отъ вращ. } B: \quad -\Omega r_2; \\ \text{сумма} = \Omega (r_1 - r_2) = +\Omega d, \end{gathered} \tag{64}$$

гдѣ d есть разстояніе между осями. Точно также для точки, между осями:

$$\begin{gathered} \text{отъ вращ. } A: \quad \Omega_1 r_1, \qquad \text{отъ вращ. } B: \quad \Omega_2 r_2 \\ \text{сумма} = \Omega (r_1 + r_2) = +\Omega d. \end{gathered}$$

Точно тоже найдемъ для точекъ, по лѣвую сторону отъ осей. Итакъ мы видимъ, что противоположныя вращенія около двухъ параллельныхъ осей обусловливаютъ поступательное движеніе точекъ системы со скоростію, равною произведенію изъ угловой скорости осей и ихъ взаимнаго разстоянія. Направленіе скорости перпендикулярно къ плоскости осей, и направлено въ ту сторону, смотря въ которую, наблюдатель видитъ, что направленіе по обѣимъ осямъ совпадаетъ съ движеніемъ часовой стрѣлки. Отсюда же слѣдуетъ, что перемѣщенія, отъ вращенія около двухъ параллельныхъ осей, съ противоположными, но неравными скоростями, можно замѣнить вращеніемъ около одной оси и поступательнымъ движеніемъ, перпендикулярнымъ къ плоскости осей. Такъ, для осей A и B, со скоростями ω_1 и ω_2, мы можемъ имѣть: или вращеніе около A, со скоростію $\omega_1 - \omega_2$, и поступательную скорость $+\omega_2 d$ (т. е. за плоскость рисунка), или вращеніе около B, со скоростію $\omega_2 - \omega_1$ (положит. или отриц.),

и поступательную скорость $+\omega_1 d$ (т. е. опять за плоскость рисунка). Такимъ образомъ, поступательное движеніе всегда направлено такъ, что около него направленія осей A и B переходятъ другъ въ друга положительнымъ вращеніемъ. Но въ то же время двѣ упомянутыя оси A и B могутъ быть замѣнены одною результирующею R, со скоростію $\omega_1-\omega_2$. Слѣдовательно на оборотъ: безконечно малое вращеніе около одной оси (напр. около R) (рис. 40) можетъ быть замѣнено такимъ же вращеніемъ около другой оси, параллельной первой (напр. около A) и поступательнымъ движеніемъ, перпендикулярнымъ къ плоскости старой и новой осей (R и A), и направленнымъ въ ту сторону отъ наблюдателя, смотря въ которую онъ видитъ направленіе прежней оси R и направленіе ея передвиженія r идущими по стрѣлкѣ часовъ. Иначе: поступательное перемѣщеніе направлено влѣво отъ наблюдателя, который, ставши въ направленіи оси, глядитъ по направленію ея передвиженія (т. е. отъ R къ A). Скорость v поступательнаго перемѣщенія равна произведенію $(\omega . r)$ изъ угловой скорости около данной оси ω и длины ея передвиженія r. Это послѣднее заключеніе о величинѣ v явствуетъ изъ того обстоятельства, что, какъ мы прежде видѣли по (64): $v=\Omega(r_1-r_2)$, гдѣ r_1 есть то разстояніе, которое мы теперь назвали черезъ r, а Ω есть скорость $\omega-\omega_1=\omega_2$; слѣдовательно $v=\omega_2(r_1-r_2)$ или по (63):

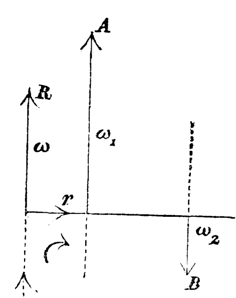


Рис. 40.

$$v=\omega . r. \tag{65}$$

Если мы имѣемъ нѣкоторое вращательное движеніе системы, соединенное съ поступательнымъ, перпендикулярнымъ къ оси вращенія, то мы можемъ замѣнить его однимъ только вращательнымъ, съ тою же угловою скоростію, но около другой оси.

Такъ напримѣръ, если система движется впередъ со скоростію v, вращаясь около оси, перпендикулярной къ направленію v, съ угловою скоростію ω, то такое движеніе можетъ быть представлено, только какъ рядъ вращеній около осей, расположенныхъ въ послѣдовательные моменты времени параллельно плоскости, въ которой лежатъ

направленія скорости v и оси ω; слѣдовательно, послѣдовательными положеніями новой оси образуется плоскость, параллельная плоскости v и ω; расположена она влѣво отъ наблюдателя, помѣщеннаго по направленію оси ω и смотрящаго по скорости v; ея разстояніе отъ первой плоскости есть $\frac{v}{\omega}$.

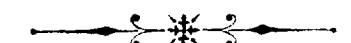
Точно также, если нѣкоторая точка системы движется равномѣрно по кругу со скоростію v, и система вращается около этой точки съ угловою скоростію ω вокругъ оси, перпендикулярной къ плоскости круга, то новыя оси вращенія (безъ поступательнаго движенія) образуютъ цилиндрическую поверхность, радіусъ которой больше или меньше радіуса круга на $\frac{v}{\omega}$, смотря по смыслу вращенія ω.

Если поступательное движеніе системы направлено не перпендикулярно къ оси вращенія, то мы разложимъ его на два: одно перпендикулярное къ оси и другое съ нею совпадающее. Вращеніе и первое изъ упомянутыхъ поступательныхъ движеній замѣнимъ извѣстнымъ образомъ однимъ вращеніемъ, и получимъ въ результатѣ вращеніе, соединенное съ поступательнымъ движеніемъ вдоль по оси, или, какъ говорятъ, *вращеніе со скольженіемъ* или *винтовое движеніе*.

Въ началѣ § 12 мы видѣли, что всякое движеніе неизмѣняемой системы можетъ быть разсматриваемо, какъ поступательное, соединенное съ послѣдовательнымъ вращеніемъ около осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку системы. Предъидущія разсужденія ведутъ насъ еще къ новому способу представлять себѣ движеніе неизмѣняемой системы. Именно, мы можемъ сказать, что *всякое движеніе неизмѣняемой системы состоитъ изъ ряда послѣдовательныхъ безконечно малыхъ винтовыхъ перемѣщеній около различныхъ осей, проходящихъ черезъ различныя точки, которыя вообще или принадлежатъ данной системы, или должны быть разсматриваемы, какъ съ нею неизмѣнно связанныя*. Повторяя такія же разсужденія, какія были сдѣланы въ концѣ предъидущаго параграфа относительно конусовъ, образуемыхъ осями, мы прійдемъ къ заключенію, что оси винтовыхъ вращеній всегда совпадаютъ, съ одной стороны съ нѣкоторою поверхностію, неизмѣнно связанною съ системою и съ нею перемѣщающеюся, а съ другой стороны—

съ нѣкоторою поверхностію, неподвижною въ пространствѣ. Движеніе системы тогда состоитъ въ томъ, что первая поверхность катится по второй, скользя при этомъ по прямымъ линіямъ, по которымъ происходитъ соприкосновеніе обѣихъ поверхностей.

Разсмотримъ теперь самый общій вопросъ о сложеніи скоростей. Предположимъ, что система испытываетъ послѣдовательныя безконечно малыя вращенія около различныхъ осей, проходящихъ черезъ разныя точки; найдемъ вращеніе и поступательное движеніе, замѣняющія рядъ упомянутыхъ перемѣщеній. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, мы замѣнимъ сперва каждую изъ осей тремя, проходящими черезъ какую нибудь точку разлагаемой оси, и параллельными тремъ даннымъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ (осямъ координатъ). Послѣ такого разложенія будемъ имѣть три серіи осей: оси каждой серіи будутъ взаимно параллельны, и оси одной изъ трехъ серій будутъ перпендикулярны осямъ каждой изъ двухъ другихъ серій. Затѣмъ каждую изъ параллельныхъ осей замѣнимъ другою параллельною осью, совпадающею для всѣхъ осей серіи съ одною и тою же линіею (осью координатъ), и соотвѣтствующимъ поступательнымъ перемѣщеніемъ. Такимъ образомъ поступая съ осями остальныхъ двухъ серій и складывая всѣ поступательныя перемѣщенія въ одно, мы получимъ три взаимно перпендикулярныя проходящія черезъ одну точку оси и поступательное перемѣщеніе. Замѣняя наконецъ три оси одною, получимъ вращеніе, сопровождаемое поступательнымъ движеніемъ, которое мы умѣемъ уже замѣнять однимъ винтовымъ движеніемъ.



Примѣчаніе. Вышеприведенный способъ сложенія легко выразить аналитическими формулами. Пусть будутъ даны оси, которыя мы обозначимъ нумерами 1, 2, 3 и т. д. до m. Буквы, выражающія величины, относящіяся къ какой нибудь оси, напримѣръ нумера n, будемъ снабжать внизу значкомъ n. Пусть угловыя скорости осей будутъ ω_1, $\omega_2 \cdots \omega_m$; ихъ направленіе опредѣлимъ для каждой тремя углами съ какими нибудь данными тремя взаимно перпендикулярными линіями (осями координатъ). Пусть эти углы будутъ α_1, β_1, γ_1, и т. д. до α_m, β_m, γ_m. Предположимъ, что для каждой оси дана еще какая нибудь точка, черезъ которую эта ось проходитъ; координаты такихъ точекъ для каждой оси пусть будутъ соотвѣтственно

x_1, y_1, z_1 и т. д. до x_m, y_m, z_m. Тремя углами и тремя упомянутыми координатами положеніе каждой оси опредѣляется вполнѣ.

Разложимъ каждую изъ данныхъ осей вращенія на три, параллельныя даннымъ прямоугольнымъ осямъ координатъ и проходящія черезъ данныя выше точки. Тогда для какой нибудь n—ной оси соотвѣтствующая угловая скорость ω_n разложится на слѣдующія три:

$$p_n = \omega_n \cos\alpha_n\,, \qquad q_n = \omega_n \cos\beta_n\,, \qquad r_n = \omega_n \cos\gamma_n\,. \tag{66}$$

Каждую изъ этихъ осей, проходящую черезъ точку (x_n, y_n, z_n), замѣнимъ параллельною осью, проходящею черезъ начало координатъ (рис. 41). Начнемъ съ оси p_n; сперва перенесемъ ее, положимъ, въ плоскость ZX, т. е. передвинемъ въ направленіи обратномъ оси y—овъ на длину y_n; тогда къ вращенію p_n прибавится еще поступательная скорость, направленная влѣво отъ плоскости, проходящей черезъ ось p_n и направленіе ея передвиженія, т. е. по положительному направленію оси z—овъ; величина этой скорости будетъ $p_n y_n$. Затѣмъ перенесемъ нашу ось вращенія, находящуюся теперь въ плоскости ZX, до совпаденія ея съ осью координатъ OX, т. е. передвинемъ ее въ направленіи обратномъ оси z—овъ на длину z_n; тогда къ вращенію p_n прибавится еще поступательная скорость, направленная въ отрицательную сторону оси y—овъ; ея величина, по отношенію къ положительному направленію оси y—овъ, будетъ—$p_n z_n$. Итакъ, перенося ось p_n на ось OX, мы прибавляемъ къ ея вращенію слѣдующія поступательныя скорости:

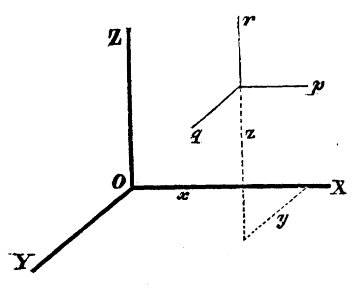


Рис. 41.

$$\text{по оси } OZ: \quad p_n y_n\,, \qquad \text{по оси } OY: \quad -p_n z_n\,.$$

Точно также, переносъ оси q_n на ось OY обусловитъ поступательныя скорости:

$$\text{по } OX: \quad q_n z_n\,, \qquad \text{по } OZ: \quad -q_n x_n\,;$$

переносъ оси r_n на ось OZ обусловитъ скорости:

$$\text{по } OY: \quad r_n x_n\,, \qquad \text{по } OX: \quad -r_n y_n\,.$$

Слѣдовательно, переносъ осей p_n, q_n, r_n на оси координатъ или, что все равно,—оси ω_n въ точку O, обусловитъ слѣдующія прибавоч-

ныя поступательныя скорости, u_n, v_n, w_n, по осямъ координатъ:

$$u_n = q_n z_n - r_n y_n ,$$
$$v_n = r_n x_n - p_n z_n , \qquad (67)$$
$$w_n = p_n y_n - q_n x_n .$$

Если мы перенесемъ въ O всѣ данныя m осей, то въ результатѣ очевидно получатся: во-первыхъ три вращенія около осей координатъ: P, Q, R, при чемъ

$$P = p_1 + p_2 + \cdot \cdot \cdot p_m ,$$

или, обозначая операцію суммованія черезъ Σ:

$$P = \Sigma p , \quad Q = \Sigma q , \quad R = \Sigma r ; \qquad (68)$$

во-вторыхъ—скорости по осямъ координатъ: U, V, W, которыя очевидно опредѣлятся такъ:

$$U = \Sigma (qz - ry) ,$$
$$U = \Sigma (rx - pz) , \qquad (69)$$
$$W = \Sigma (py - qx) .$$

Вращенія (68) и поступательныя движенія (69) даютъ очевидно: 1) вращеніе около нѣкоторой оси, проходящей черезъ O, съ угловою скоростію

$$\Omega^2 = P^2 + Q^2 + R^2 , \qquad (70)$$

при чемъ косинусы угловъ этой оси съ осями координатъ будутъ

$$\cos(\Omega,x) = \frac{P}{\Omega} , \quad \cos(\Omega,y) = \frac{Q}{\Omega} , \quad \cos(\Omega,z) = \frac{R}{\Omega} ; \qquad (71)$$

2) поступательное движеніе, со скоростію

$$C^2 = U^2 + V^2 + W^2 , \qquad (72)$$

при чемъ направленіе этой скорости опредѣлится такъ:

$$\cos(C,x) = \frac{U}{C} , \quad \cos(C,y) = \frac{V}{C} , \quad \cos(C,z) = \frac{W}{C} . \qquad (73)$$

Уголъ между направленіями Ω и C опредѣлится такъ *):

$$\cos(\Omega,C) = \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{U}{C} + \frac{Q}{\Omega} \cdot \frac{V}{C} + \frac{R}{\Omega} \cdot \frac{W}{C} . \qquad (74)$$

*) Вообще, если даны углы двухъ линій съ осями координатъ (для одной: α, β, γ, а для другой: a, b, c), то уголъ φ между ними мы отыщемъ такимъ образомъ. На одной изъ линій, положимъ первой, отложимъ длину l; проложеніе этой

Скорость C разложимъ на двѣ: одну, направленную по оси вращенія Ω, величина которой будетъ

$$A = C\cos(\Omega, C), \tag{75}$$

и другую, перпендикулярную къ этой оси, величина которой будетъ очевидно

$$B = C\sin(\Omega, C). \tag{76}$$

Перенесемъ теперь ось Ω параллельно самой себѣ по направленію, перпендикулярному плоскости Ω и C, на длину $\Omega C\sin(\Omega, C)$ влѣво отъ направленія скорости $C\sin(\Omega, C)$; въ результатѣ получимъ угловую скорость Ω, около перенесенной оси, и поступательную скорость $C\cos(\Omega, C)$, вдоль по этой оси. Такимъ образомъ, всѣ вращенія: ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_m$, замѣнимъ однимъ винтовымъ перемѣщеніемъ.

Координаты, ξ, η, ζ, точки, въ которую должна быть въ послѣдній разъ перенесена ось Ω, найдутся такимъ образомъ. Если мы перенесемъ ось Ω изъ точки O въ точку (ξ, η, ζ), то, какъ легко видѣть изъ (67), къ прежде бывшимъ поступательнымъ скоростямъ U, V, W еще прибавятся скорости

$$R\eta - Q\zeta, \quad P\zeta - R\xi, \quad Q\xi - P\eta,$$

которыя, слагаясь съ первыми, должны дать только проложенія нѣкоторой скорости A', направленной по оси вращенія, т. е. дать три скорости:

$$A'\frac{P}{\Omega}, \quad A'\frac{Q}{\Omega}, \quad A'\frac{R}{\Omega}.$$

Слѣдовательно, въ такомъ случаѣ должны удовлетворяться уравненія:

$$\left.\begin{aligned} R\eta - Q\zeta + U &= A'\frac{P}{\Omega}, \\ P\zeta - R\xi + V &= A'\frac{Q}{\Omega}, \\ Q\xi - P\eta + W &= A'\frac{R}{\Omega}, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

длины на другую линію будетъ $l\cos\varphi$; но составляющія линіи l по осямъ координатъ будутъ: $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$, которыя со второю линіею будутъ дѣлать очевидно углы a, b, c; проложенія этихъ составляющихъ на вторую линію будутъ: $l\cos\alpha\cos a$, $l\cos\beta\cos b$, $l\cos\gamma\cos c$; а такъ какъ проложеніе одной линіи на другую равно суммѣ проложеній на туже вторую линію составляющихъ первой, то

$$l\cos\varphi = l\cos\alpha\cos a + l\cos\beta\cos b + l\cos\gamma\cos c.$$

изъ которыхъ мы и опредѣлимъ искомыя координаты ξ, η, ζ и скорость A'. Умножая эти уравненія соотвѣтственно на P, Q, R и складывая, мы получаемъ, помня (70):

$$UP + VQ + WR = A'\Omega\,,$$

откуда на основаніи (74) и (75) заключаемъ, что

$$A' = A\,.$$

Исключая неизвѣстное A' изъ ур. (77), мы получаемъ два уравненія для опредѣленія трехъ величинъ ξ, η, ζ; слѣдовательно положеніе искомой точки остается неопредѣленнымъ, чего и слѣдовало ожидать, ибо, разъ найдя одну точку, въ которую должно перенести паралелльно самой себѣ ось Ω, мы можемъ указать еще на неопредѣленное число точекъ, лежащихъ по направленію этой оси и удовлетворяющихъ требованіямъ задачи. Одну изъ точекъ, черезъ которыя пройдетъ ось Ω, въ своемъ новомъ положеніи, мы можемъ найти слѣдующимъ образомъ. Подставляя въ ур. (77) величину

$$A' = \frac{1}{\Omega}(UP + VQ + WR)$$

и замѣняя соотвѣтственно въ каждомъ изъ упомянутыхъ уравненій величины P^2, Q^2, R^2 черезъ

$$\Omega^2 - Q^2 - R^2, \qquad \Omega^2 - R^2 - P^2, \qquad \Omega^2 - P^2 - Q^2,$$

мы представимъ уравненія (77) въ видѣ:

$$R\left[\eta - \frac{PW - RU}{\Omega^2}\right] - Q\left[\zeta - \frac{QU - PV}{\Omega^2}\right] = 0\,,$$

$$P\left[\zeta - \frac{QU - PV}{\Omega^2}\right] - R\left[\xi - \frac{RV - QW}{\Omega^2}\right] = 0\,, \qquad (77)'$$

$$Q\left[\xi - \frac{RV - QW}{\Omega^2}\right] - P\left[\eta - \frac{PW - RU}{\Omega^2}\right] = 0\,,$$

откуда видимъ, что координаты

$$\xi = \frac{RV - QW}{\Omega^2}\,, \qquad \eta = \frac{PW - RU}{\Omega^2}\,, \qquad \zeta = \frac{QU - PV}{\Omega^2}\,, \qquad (77)''$$

удовлетворяя ур. (77)', принадлежатъ точкѣ, черезъ которую должна пройти ось Ω.

Если данныя вращенія не производятъ въ результатѣ никакихъ перемѣщеній системы, то изъ (68) и (69) очевидно, что должны удо-

влетворяться условія:

$$\Sigma p = 0\,, \quad \Sigma q = 0\,, \quad \Sigma r = 0\,,$$
$$\Sigma(qz - ry) = 0\,, \quad \Sigma(rx - pz) = 0\,, \quad \Sigma(py - qx) = 0\,. \tag{78}$$

Если удовлетворяются только первыя три изъ вышеприведенныхъ условій (78), то въ результатѣ данныхъ вращеній будетъ одно только поступательное перемѣщеніе; если удовлетворяются только послѣднія три условія, то данныя вращенія могутъ быть замѣнены однимъ только вращеніемъ около оси, проходящей черезъ O. Наконецъ, условіе существованія нѣкоторой результирующей оси, безъ поступательнаго по ней движенія, будетъ очевидно по (74):

$$\cos(\Omega, C) = 0 \quad \text{или} \quad UP + VQ + WR = 0\,. \tag{79}$$

Въ общемъ случаѣ сложенія угловыхъ скоростей, представленномъ здѣсь, заключаются конечно всѣ частные случаи, разсмотрѣнные въ началѣ параграфа. Возьмемъ для примѣра двѣ параллельныя одноименныя оси, на разстояніи h другъ отъ друга, со скоростями ω_1 и ω_2. Плоскость обѣихъ осей примемъ за плоскость ZX; одну изъ осей—за ось z—овъ. Тогда очевидно:

$$p_1 = q_1 = 0\,, \quad r_1 = \omega_1\,, \quad x_1 = y_1 = z_1 = 0$$
$$p_2 = q_2 = 0\,, \quad r_2 = \omega_2\,, \quad x_2 = h\,, \quad y_2 = z_2 = 0.$$

Урр. (68) и (69) будутъ:

$$P = Q = 0\,, \quad R = \omega_1 + \omega_2\,,$$
$$U = 0\,, \quad V = h\omega_2\,, \quad W = 0\,. \qquad \text{(см. 61)}$$

Урр. (74) и (75) дадутъ:

$$\cos(\Omega, C) = 0\,, \quad A = 0\,, \quad B = C = h\omega_2\,,$$

вслѣдствіе чего урр. (77) обращаются въ

$$(\omega_1 + \omega_2)\eta = 0\,, \quad -(\omega_1 + \omega_2)\xi + h\omega_2 = 0\,, \qquad \text{(см. (60))}$$

откуда $\eta = 0$; т. е. результирующая ось лежитъ въ плоскости XZ.

Съ помощію формулъ (67) можно легко выразить скорость каждой точки неизмѣняемой системы, зависящую отъ угловыхъ скоростей этой послѣдней. Пусть будутъ даны угловыя скорости системы, p, q, r, около трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, проходящихъ черезъ одну точку. Примемъ эти оси за оси координатъ, и опредѣлимъ скорости вдоль этихъ осей для какой нибудь точки систе-

мы, координаты которой суть x, y, z. Для этого перенесемъ всѣ три оси вращенія параллельно самимъ себѣ въ точку (x, y, z). Тогда къ вращательнымъ скоростямъ системы, около новыхъ осей, мы должны прибавить еще поступательныя скорости

$$u = ry - qz\,, \qquad v = pz - rx\,, \qquad w = qx - py\,. \tag{80}$$

Но сама точка (x, y, z), которая теперь будетъ лежать ва оси вращенія, очевидно будетъ перемѣщаться только вслѣдствіе поступательнаго движенія системы, и не будетъ слѣдовательно имѣтъ другихъ скоростей, кромѣ (80); а такъ какъ движеніе системы, выражаемое скоростями ея точекъ, одно и тоже, представили-ли мы оси вращенія на ихъ старомъ мѣстѣ, безъ поступательныхъ движеній, или—на новомъ, съ поступательными скоростями, то выраженія (80) должны очевидно представлять искомыя скорости точки (x, y, z), зависящія отъ вращеній p, q, r, около старыхъ осей.

---

§ 14. Ускоренія точекъ неизмѣняемой системы.

Такъ какъ точки неизмѣняемой системы въ теченіи каждаго элемента времени движутся вообще поступательно и вмѣстѣ съ тѣмъ по кругамъ, около мгновенныхъ осей, то ускоренія каждой точки системы будутъ очевидно слагаться изъ ускоренія поступательнаго движенія, общаго всѣмъ точкамъ системы, и изъ ускореній круговыхъ движеній. Эти послѣднія въ свою очередь слагаются каждое изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ ускореній: одного, направленнаго къ центру круга, и другаго—по кругу.

Если величина угловой скорости системы ω измѣнится безконечно мало, получивши безконечно малое приращеніе $d\omega$, то скорость точки по кругу изъ величины $r\omega$, гдѣ r есть разстояніе точки отъ оси вращенія, обратится въ $r\,(\omega + d\omega)$, получая очевидно приращеніе $r d\omega$. Слѣдовательно, ускореніе точки по кругу будетъ $r\frac{d\omega}{dt}$. Отношеніе $\frac{d\omega}{dt}$ называется **угловымъ ускореніемъ** системы около данной оси. Очевидно, что приращенія угловой скорости, а слѣдовательно и угловыя ускоренія, слагаются также, какъ угловыя скорости.

Ускореніе, направленное къ центру, или **центростремительное**, будетъ равно $\frac{v^2}{r}$, гдѣ v есть скорость точки по кругу; но такъ

какъ $v = r\omega$, то слѣдовательно центростремительное ускореніе выразится черезъ $r\omega^2$. Итакъ, все ускореніе g точки (x, y, z), зависящее отъ вращательнаго движенія системы, найдется изъ уравненія (см. (24)):

$$g^2 = r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + r^2\omega^4. \tag{81}$$

Примѣчаніе. Такъ какъ угловыя ускоренія слагаются также какъ скорости, то проложенія ускореній на прямоугольныя оси координатъ найдутся по формулѣ сложенія (80). Если угловая скорость ω, около какой нибудь оси, возрастаетъ по величинѣ и направленію на $\Delta\omega$, то ея слагающія угловыя скорости p, q, r получаютъ соотвѣтственно приращенія dp, dq, dr, величина которыхъ выразится ребрами прямоугольнаго параллелепипеда, діагональ котораго есть $\Delta\omega$. Соотвѣтствующія приращенія скоростей по осямъ координатъ: du, dv, dw, для какой нибудь точки (x, y, z), найдутся по (80):

$$du = dr \,.\, y - dq \,.\, z\,, \quad dv = dp \,.\, z - dr \,.\, x\,, \quad dw = dq \,.\, x - dp \,.\, y\,. \tag{82}$$

Дѣля обѣ части каждаго изъ предыдущихъ уравненій на элементъ времени dt, получимъ въ лѣвыхъ частяхъ ускоренія по осямъ координатъ для данной точки, а въ правыхъ ихъ выраженія, съ помощію слагающихъ угловыхъ ускореній:

$$\frac{du}{dt} = y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt}\,, \quad \frac{dv}{dt} = z\frac{dp}{dt} - x\frac{dr}{dt}\,, \quad \frac{dw}{dt} = x\frac{dq}{dt} - y\frac{dp}{dt}\,. \tag{83}$$

Такъ какъ приращенія dp, dq, dr опредѣляются, какъ величины проложеній нѣкоторой линіи, равной по величинѣ $\Delta\omega$, на оси координатъ, то очевидно, ихъ частныя отъ дѣленія на dt, опредѣлятся такимъ-же образомъ; слѣдовательно, обозначая углы направленія $\Delta\omega$ съ осями координатъ черезъ $(\Delta\omega, x)$, $(\Delta\omega, y)$, $(\Delta\omega, z)$, будемъ имѣть:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Delta\omega}{dt}\cos(\Delta\omega, x)\,, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta\omega}{dt}\cos(\Delta\omega, y)\,, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\Delta\omega}{dt}\cos(\Delta\omega, z). \tag{84}$$

Если мы обозначимъ черезъ ∂ разстояніе точки (x, y, z) отъ оси вращенія, а черезъ (∂, x), (∂, y), (∂, z)—углы, которые это разстояніе дѣлаетъ съ осями координатъ, то проложенія центростремительнаго ускоренія на эти оси будутъ:

$$\partial\omega^2\cos(\partial, x)\,, \quad \partial\omega^2\cos(\partial, y)\,, \quad \partial\omega^2\cos(\partial, z)\,, \tag{85}$$

причемъ направленіе по ∂ должно совпадать съ направленіемъ раз-

смотриваемаго ускоренія, т. е. идти отъ точки (x, y, z) къ оси. Пусть OR (рис. 42) будетъ направленіе оси ω, AB—направленіе ∂, и ρ—разстояніе точки A отъ начала координатъ, считаемое отъ O къ A. Тогда очевидно (смотр. конецъ § 4), проложеніе на какую нибудь ось координатъ длины OB равно суммѣ проложеній на туже ось длинъ ρ и ∂. Слѣдовательно для оси x—овъ, напримѣръ:

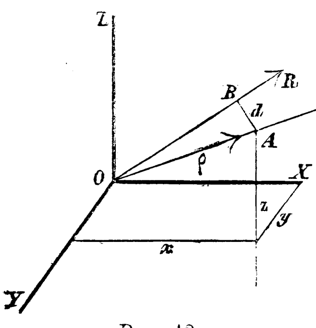


Рис. 42.

$$OB \cos(\omega,x) = \rho \cos(\rho,x) + \partial \cos(\partial,x). \quad (86)$$

Но изъ треугольника OAB: $OB = \rho \cos(\rho,\omega)$, и кромѣ того очевидно:

$$\cos(\rho,x) = \frac{x}{\rho}, \quad \cos(\rho,y) = \frac{y}{\rho}, \quad \cos(\rho,z) = \frac{z}{\rho},$$

$$\cos(\rho,\omega) = \cos(\rho,x)\cos(\omega,x) + \cos(\rho,y)\cos(\omega,y) + \cos(\rho,z)\cos(\omega,z)$$
$$= \frac{x}{\rho}\cdot\frac{p}{\omega} + \frac{y}{\rho}\cdot\frac{q}{\omega} + \frac{z}{\rho}\cdot\frac{r}{\omega},$$

гдѣ p, q, r суть составляющія угловыя скорости отъ ω, около осей координатъ. Равенство (86) такимъ образомъ обратится въ

$$\rho\cos(\omega,x)\left(\frac{x}{\rho}\cdot\frac{p}{\omega} + \frac{y}{\rho}\cdot\frac{q}{\omega} + \frac{z}{\rho}\cdot\frac{r}{\omega}\right) = \rho\cdot\frac{x}{\rho} + \partial\,.\cos(\partial,x),$$

вслѣдствіе чего изъ (85):

$$\partial\,.\,\omega^2\cos(\partial,x) = (px+qy+rz)p - \omega^2 x,$$

и такимъ же образомъ очевидно:

$$\left.\begin{aligned}\partial\,.\,\omega^2\cos(\partial,y) &= (px+qy+rz)\,q - \omega^2 y,\\ \partial\,.\,\omega^2\cos(\partial,z) &= (px+qy+rz)\,r - \omega^2 z.\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Обозначая теперь черезъ j_x, j_y, j_z, составляющія по осямъ координатъ ускоренія поступательнаго движенія точекъ системы, мы получимъ, на основаніи (83) и (87), слѣдующія выраженія для составляющихъ по осямъ координатъ полнаго ускоренія какой нибудь точки (x, y, z) неизмѣняемой системы:

$$\left.\begin{aligned}g_x &= j_x + y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt} + (px+qy+rz)p - \omega^2 x,\\ g_y &= j_y + z\frac{dp}{dt} - x\frac{dr}{dt} + (px+qy+rz)\,q - \omega^2 y,\\ g_z &= j_z + x\frac{dq}{dt} - y\frac{dp}{dt} + (px+qy+rz)\,r - \omega^2 z.\end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Такъ какъ поступательное движенiе, общее всѣмъ точкамъ системы, можетъ быть вообще криволинейнымъ, то ускоренiе этого движенiя тоже можетъ быть представлено, на основанiи § 8, какъ результирующее двухъ ускоренiй: по траэкторiи и по ея радiусу кривизны.

Очевидно, что форма выраженiй (80) останется одна и таже, по какимъ-бы тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленiямъ мы ни разлагали угловую скорость ω данной оси, лишь-бы эти три направленiя были приняты за оси координатъ, при опредѣленiи положенiя точекъ системы. Такимъ образомъ, мы можемъ или всегда сохранять одно и тоже направленiе осей координатъ, или для каждаго момента времени выбирать новое. Послѣднее имѣетъ мѣсто, когда мы отмѣчаемъ положенiе точекъ системы относительно осей координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ системою и вмѣстѣ съ нею вращающихся въ пространствѣ.

Съ помощiю извѣстныхъ правилъ аналитической геометрiи легко найти проложенiя ускоренiя на неподвижныя оси координатъ, зная эти проложенiя для подвижныхъ осей, и наоборотъ.

§ 15. Опредѣленiе движенiя неизмѣняемой системы.

Мы видѣли въ § 13, что движенiе точекъ неизмѣняемой системы вполнѣ извѣстно, если дано движенiе одной какой либо точки системы, и кромѣ того, дано положенiе нѣкоторой оси, проходящей черезъ упомянутую точку, около которой должна повернуться система на опредѣленный уголъ, чтобы ея точки пришли въ положенiя, занимаемыя ими въ данный моментъ времени. Посмотримъ теперь, какими аналитическими выраженiями представляются выше упомянутыя данныя.

Положенiе точекъ системы и его измѣненiя мы будемъ опредѣлять относительно нѣкоторыхъ опредѣленныхъ осей координатъ. Если ξ, η, ζ будутъ ординаты той точки системы, черезъ которую должна проходить ось вращенiя, т. е. координаты центра вращенiя, то движенiе этой точки (§ 1) вообще можетъ быть опредѣлено уравненiями:

$$\xi = f_1(t), \quad \eta = f_2(t), \quad \zeta = f_3(t). \tag{89}$$

Перемѣщенiя точки (ξ, η, ζ) этими уравненiями будутъ опредѣлены вполнѣ; остальныя точки системы, кромѣ этого перемѣщенiя, будутъ

имѣть еще другія, обусловливаемыя вращеніями около мгновенныхъ осей, проходящихъ черезъ точку (ξ, η, ζ). Но все безчисленное множество безконечно малыхъ вращеній, совершенныхъ въ теченіи какого либо времени t, можетъ быть замѣнено однимъ конечнымъ поворотомъ около нѣкоторой оси, проходящей черезъ тотъ-же центръ вращенія. Слѣдовательно, къ концу любаго промежутка времени t, т. е. для любаго момента времени t, мы можемъ вообразить себѣ нѣкоторую ось вращенія, поворотъ около которой на опредѣленный уголъ φ, прибавясь къ поступательному движенію (89), приведетъ точки системы въ ихъ положенія, соотвѣтствующія данному моменту времени, и замѣнитъ собою всѣ безконечно малыя вращенія, совершенныя системою, отъ начала движенія до даннаго момента времени. Положеніе такой оси съ одной стороны опредѣлено тѣмъ, что она должна проходить черезъ точку (ξ, η, ζ); съ другой стороны, опредѣленіе этого положенія окончательно добавляется даннымъ направленіемъ оси, которое будетъ извѣстно, когда извѣстны два какіе либо изъ угловъ α, β, γ, образуемыхъ положительнымъ направленіемъ оси съ осями координатъ *). Такъ какъ вообще эти углы для разныхъ моментовъ времени очевидно будутъ различны, то направленіе результирующей оси, къ концу любаго времени t, должно быть дано уравненіями вида

$$\alpha = F_1(t), \quad \beta = F_2(t), \tag{90}$$

изъ которыхъ, съ помощію соотношенія

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

мы можемъ всегда вывести третье уравненіе вида

$$\gamma = F_3(t). \tag{90'}$$

Должно замѣтить, что эта результирующая ось, вообще говоря, не будетъ представлять собой ни одной изъ мгновенныхъ осей, какъ это очевидно изъ ея опредѣленія. Наконецъ уголъ поворота φ, около

---

*) Три угла α, β, γ для всякаго направленія связаны между собою, для прямоугольныхъ осей координатъ, уравненіемъ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Дѣйствительно, если мы отложимъ по нашему направленію какую нибудь длину l, то проложенія этой длины на оси координатъ будутъ: $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$; а такъ какъ l есть діагональ прямоуг. параллелепипеда, ребра котораго суть вышеприведенныя проложенія, то

$$l^2 = l^2\cos^2\alpha + l^2\cos^2\beta + l^2\cos^2\gamma.$$

положительнаго направленія данной, для конца времени t, результирующей оси, долженъ быть опредѣленъ, для конца того-же времени, уравненіемъ

$$\varphi = \varphi(t). \tag{91}$$

Шестью уравненіями (89), (90), (91):

$$\begin{aligned} \xi &= f_1(t), \quad \eta = f_2(t), \quad \zeta = f_3(t), \\ \alpha &= F_1(t), \quad \beta = F_2(t), \quad \varphi = \varphi(t), \end{aligned} \tag{92}$$

движеніе неизмѣняемой системы вполнѣ опредѣляется, и, для любаго момента времени t, мы можемъ по нимъ опредѣлить положеніе въ пространствѣ любой точки системы.

Вообще, если мы представимъ себѣ какія нибудь три оси координатъ, неизмѣнно соединенныя съ системою, то положеніе точекъ этой послѣдней, относительно такихъ координатъ, останется одно и тоже во время движенія; самыя-же оси координатъ будутъ двигаться вмѣстѣ съ системою. Слѣдовательно, положеніе точекъ системы въ пространствѣ, т. е. ихъ положеніе относительно нѣкоторой другой неподвижной системы координатъ, опредѣлится вполнѣ, если мы будемъ знать положеніе вышеупомянутыхъ подвижныхъ осей относительно неподвижныхъ. Аналитическая геометрія учитъ насъ, что положеніе одной системы координатъ относительно другой опредѣляется шестью данными. Если одна изъ системъ движется, то упомянутыя данныя будутъ измѣняться со временемъ, и движеніе будетъ опредѣлено, если всѣ они будутъ выражены, какъ нѣкоторыя функціи времени. Такимъ образомъ мы опять прійдемъ къ шести уравненіямъ, опредѣляющимъ движеніе неизмѣняемой системы.



Если для каждаго момента времени даны: 1) три слагающія скорости $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, по осямъ координатъ, поступательнаго движенія неизмѣняемой системы и 2) три угловыя скорости p, q, r системы около осей координатъ, то для каждаго момента времени мы можемъ найти скорости, по осямъ координатъ, для любой точки системы, координаты которой въ этотъ моментъ времени будутъ x, y, z. Упомянутыя скорости, v_x, v_y, v_z, очевидно будутъ слагаться, каждая, изъ скоростей поступательнаго движенія, и скоростей, зависящихъ отъ вращенія и данныхъ въ выраженіи (80); т. е.:

$$v_x = \mathfrak{u} + u, \quad v_y = \mathfrak{v} + v, \quad v_z = \mathfrak{w} + w$$

или по (80):

$$v_x = \mathfrak{u} + ry - qz\,,$$
$$v_y = \mathfrak{v} + pz - rx\,, \qquad (93)$$
$$v_z = \mathfrak{w} + qx - py\,.$$

Въ такомъ видѣ представятся скорости любой точки (x, y, z) системы, къ концу нѣкотораго времени t. Зная первоначальное положеніе для какой нибудь точки системы, т. е. зная ея первоначальныя координаты x_0, y_0, z_0, мы найдемъ ея координаты x_1, y_1, z_1, къ концу перваго элемента времени dt, слѣдующимъ образомъ:

$$x_1 = x_0 + v_{0x}dt = x_0 + \mathfrak{u}_0 dt + y_0 r_0 dt - z_0 q_0 dt\,,$$
$$y_1 = y_0 + v_{0y}dt = y_0 + \mathfrak{v}_0 dt - z_0 p_0 dt - x_0 r_0 dt\,, \quad \text{и т. д.}$$

гдѣ $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0 \ldots p_0$, q_0 и т. д. суть скорости, взятыя для начала движенія. Координаты x_2, y_2, z_2, къ концу втораго элемента времени, опредѣлятся такъ:

$$x_2 = x_0 + \mathfrak{u}_0 dt + \mathfrak{u}_1 dt + y_0 r_0 dt + y_1 r_1 dt - z_0 q_0 dt - y_1 q_1 dt\,, \quad \text{и т. д.}$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 должны быть опредѣлены изъ предыдущихъ уравненій. Произведя такого рода вычисленія для безконечно большаго числа n послѣдовательныхъ элементовъ времени, мы получимъ координаты разсматриваемой точки системы, для конца любаго конечнаго промежутка времени t (равнаго очевидно ndt):

$$x_n = x_0 + \Sigma v_x dt = x_0 + \Sigma\mathfrak{u}dt + \Sigma rydt - \Sigma qzdt\,,$$
$$y_n = y_0 + \Sigma v_y dt = y_0 + \Sigma\mathfrak{v}dt + \Sigma pzdt - \Sigma rxdt\,, \qquad (94)$$
$$z_n = z_0 + \Sigma v_z dt = z_0 + \Sigma\mathfrak{w}dt + \Sigma qxdt - \Sigma pydt\,,$$

гдѣ знакъ Σ обозначаетъ, что взята сумма отъ членовъ, видъ которыхъ опредѣляется выраженіемъ, стоящимъ за знакомъ суммы. Такъ,

$$\Sigma\mathfrak{w}dt = \mathfrak{w}_0 dt + \mathfrak{w}_1 dt + \mathfrak{w}_2 dt + \cdots \mathfrak{w}_n dt\,,$$
$$\Sigma rxdt = r_0 x_0 dt + r_1 x_1 dt + r_2 x_2 dt + \cdots r_n x_n dt\,, \quad \text{и. т. д.}$$

Интегральное исчисленіе даетъ намъ способы находить такого рода суммы. Суммы вида $\Sigma\mathfrak{w}dt$ отличаются отъ суммъ вида $\Sigma rxdt$ тѣмъ, что въ первой суммѣ всѣ члены даны, какъ функціи времени; во второй-же каждый членъ суммы множится на искомую величину x, y или z, которая можетъ быть опредѣлена суммованіемъ для конца предыдущаго момента времени. Способъ нахожденія такого рода суммъ,

въ которыхъ каждый членъ суммы множится на искомую сумму, дается въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Точно также легко видѣть, что если даны для каждаго момента времени (т. е. какъ функціи времени): 1) ускоренія по осямъ координатъ поступательнаго движенія системы, 2) угловыя ускоренія около осей координатъ, 3) начальныя скорости поступательнаго движенія и 4) начальныя угловыя скорости, то, съ помощію урр. (88), можно опредѣлить приращеніе скорости для любой точки системы, къ концу любаго промежутка времени, и за тѣмъ по скоростямъ найти координаты этой точки, какъ было показано выше. Рѣшеніе такой задачи выполняется опять съ помощію суммованій приращеній скоростей, для послѣдовательныхъ элементовъ времени. При этихъ суммованіяхъ опять члены суммы будутъ помножаться на искомыя неизвѣстныя. Слѣдовательно, опредѣленіе движенія неизмѣняемой системы по ускореніямъ должно свестись къ рѣшенію дифференціальныхъ уравненій, о которыхъ было упомянуто выше.

ГЛАВА II.

ОСНОВНЫЯ НАЧАЛА УЧЕНІЯ О СИЛѢ (ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ).

§ 16. Матерія, масса.

Все, что, воздѣйствуя на наши чувства, представляется намъ занимающимъ пространство, по длинѣ, ширинѣ и высотѣ, называется *матеріей*, т. е. все, что занимаетъ извѣстный объемъ и такъ или иначе нами ощущается.

Въ какомъ бы разнообразіи видовъ намъ ни представлялась матерія, мы находимъ въ ней всегда нѣсколько общихъ качествъ, совокупность которыхъ опредѣляетъ наше о ней понятіе. Одно изъ такихъ качествъ уже высказывается въ самомъ опредѣленіи матеріи, какъ чего-то наполняющаго извѣстные объемы. Слѣдовательно, одно изъ общихъ качествъ матеріи есть *протяженность*. Другое качество матеріи, существованіе котораго очевидно, есть *способность перемѣщаться*, какъ въ цѣломъ, такъ и въ частяхъ. Слѣдовательно матерія, занимающая данный объемъ, можетъ перемѣститься, или всѣми своими частями однообразно и не мѣняя своего объема, или различными своими частями различно, мѣняя форму и величину своего объема. Отсюда—понятіе о *сжимаемости* и *расширяемости* матеріи.

Слѣдовательно, замѣчая изчезновеніе какой нибудь части даннаго количества матеріи, мы прежде всего представляемъ себѣ это изчезновеніе, какъ перемѣщеніе упомянутой части изъ одного мѣста

пространства въ другое; при этомъ перемѣщенная матерія можетъ намъ явиться съ другими качествами, чѣмъ тѣ, которыя она имѣла до перемѣщенія. Мы можемъ не знать, куда перемѣстится изчезнувшая изъ даннаго мѣста часть матеріи, т. е. не имѣть данныхъ для подобнаго опредѣленія; но все таки не можемъ отрицать возможности найти гдѣ либо въ пространствѣ ушедшую прочь часть матеріи; слѣдовательно, у насъ нѣтъ основаній заключать о безслѣдномъ исчезновеніи матеріи, какъ слѣдствіи ея перемѣщенія. Отсюда—понятіе о неразрушимости матеріи и о ея неизмѣнномъ количествѣ въ мірѣ.

Объемъ, занятый сплошь опредѣленнымъ количествомъ матеріи, не можетъ въ тоже самое время быть занятъ еще другимъ количествомъ матеріи. Въ противномъ случаѣ, вся матерія вселенной могла бы быть представлена умѣщенной въ объемѣ, меньшемъ всякой данной величины. Отсюда—понятіе о непроницаемости матеріи.

Такъ какъ матерія, будучи непроницаема, можетъ однако измѣнять свой объемъ въ извѣстныхъ предѣлахъ, то мы не можемъ себѣ представить пространство наполненное такою матеріею сплошь, безъ промежутковъ. Отсюда—понятіе о скважности.

Промежутки внутри даннаго тѣла, не занятые матерій, могутъ быть при случаѣ выполнены матеріею другаго вида, нежели тотъ, къ которому принадлежитъ разсматриваемое тѣло. Наблюдая такого рода смѣшенія различныхъ видовъ матеріи (простыя или химическія), мы замѣчаемъ, что смѣшивающіяся виды матеріи могутъ быть найдены въ каждой малѣйшей частицѣ смѣси, насколько только наши средства позволяютъ намъ наблюдать такія малѣйшія частицы. Вслѣдствіе этого мы приходимъ къ заключенію, что матеріальныя тѣла должны состоять изъ отдѣльныхъ матеріальныхъ частицъ, расположенныхъ на нѣкоторыхъ весьма малыхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Такія матеріальныя частицы носятъ названіе молекулъ.

Нашему непосредственному наблюденію доступны только группы молекулъ, образующія матеріальныя тѣла. Только путемъ умозаключеній и предположеній мы можемъ, по непосредственнымъ наблюденіямъ надъ группами молекулъ, составлять себѣ понятіе о томъ, что происходитъ съ каждою молекулою въ отдѣльности. Къ области Физики относятся по преимуществу тѣ явленія матеріальнаго міра, которыя могутъ быть объяснены перемѣщеніями молекулъ. безъ измѣненія ихъ внутренняго строенія.

Количество матеріи, представляемой даннымъ тѣломъ, называется массою этого тѣла. За единицу массы принимается количиство матеріи, заключающееся въ одномъ граммѣ.

Граммъ есть тысячная доля нѣкотораго образца, сдѣланнаго въ концѣ прошлаго столѣтія изъ платины и хранящагося въ Парижѣ. Упомянутый образецъ называется килограммъ. Въ свое время килограммъ долженъ былъ представлять количесто матеріи, заключающееся въ одномъ кубическомъ дециметрѣ воды, при температурѣ $4^\circ C$. Но познѣйшія измѣренія показали, что количество матеріи въ куб. дециметрѣ воды есть не 1000 грам., но 1000.013 грам.. Слѣдовательно, измѣряя массу тѣла, мы сравниваемъ ее не съ количествомъ матеріи, заключенной въ опредѣленномъ объемѣ воды, но съ количествомъ матеріи опредѣленнаго платиноваго образца или сдѣланныхъ съ этого образца копій. Въ техническомъ отношеніи, послѣдній способъ сравненія легче и точнѣе, нежели первый.

Количество матеріи, заключенной въ единицѣ объема (т. е. куб. центим.) даннаго тѣла называется плотностію этого тѣла. Если извѣстна масса M тѣла, выраженная въ граммахъ, и его объемъ V, выраженный въ цент.^{3}, то плотность D тѣла найдется, на основаніи вышеприведеннаго опредѣленія, какъ частное массы на объемъ, т. е:

$$D = \frac{M \text{ грам.}}{V \text{ цент.}^3}, \tag{1}$$

вслѣдствіе чего наименованіе, или размѣръ, единицы плотности, опредѣлится такъ:

$$\text{един. плотн.} = \frac{\text{грам.}}{\text{цент.}^3} \tag{2}$$

Отвлеченное число, представляющее отношеніе $\frac{D'}{D}$ плотностей D' и D двухъ тѣлъ, называется относительною плотностію перваго тѣла относительно втораго.

Перечисленныя выше свойства матеріи не указываютъ намъ еще на способъ, какъ найти, во сколько разъ масса даннаго тѣла больше или меньше массы образца, принятаго за единицу, или вообще какъ рѣшить вопросъ, равны или не равны массы двухъ данныхъ тѣлъ. Пока мы можемъ только сказать, что двойные, тройные и т. д. объемы однородной матеріи заключаютъ въ себѣ также двойныя, тройныя и т. д. массы; съ другой стороны, мы знаемъ, что упомяну-

тыя массы будутъ во столько же разъ тяжелѣе. Отсюда можемъ вообще заключить, что чѣмъ больше масса какого нибудь тѣла, тѣмъ оно тяжелѣе, хотя точное значеніе термина «тяжелѣе» узнаемъ только впослѣдствіи, познакомившись съ дѣйствіемъ силъ на массы.

Тѣмъ не менѣе перечисленныя выше свойства матеріи приводятъ насъ къ понятію о массѣ, какъ о величинѣ, которая такъ или иначе можетъ быть измѣрена и выражена въ опредѣленныхъ единицахъ. Этого понятія совершенно достаточно для вывода дальнѣйшихъ заключеній о дѣйствіяхъ силъ, какъ увидимъ ниже.

§ 17. Первый законъ Ньютона: опредѣленіе понятія о силѣ.

Данная масса, вслѣдствіе установленнаго нами за нею свойства подвижности, можетъ двигаться различными способами, которые мы можемъ въ нашемъ представленіи разнообразить до безконечности. То или другое движеніе не представляется исключительнымъ признакомъ данной массы, а является ея случайнымъ качествомъ, обусловливаемымъ посторонними обстоятельствами, независимыми отъ самой массы. Поэтому, если одинъ разъ мы наблюдаемъ одно движеніе нѣкоторой массы, а другой разъ—другое движеніе той же самой массы, то различіе этихъ двухъ движеній объясняемъ себѣ тѣмъ, что внѣшнія условія въ томъ и другомъ случаѣ были различны. Эти внѣшнія условія и будутъ причиною различія двухъ движеній.

Всякое движеніе, въ своихъ элементахъ, есть прямолинейное и равномѣрное. Слѣдовательно, одно движеніе отличается отъ другаго величиною и направленіемъ скоростей. Движеніе массы, на одномъ элементѣ ея пути, будетъ отлично отъ ея движенія на другомъ элементѣ, когда скорости на обоихъ элементахъ будутъ различны какъ по величинѣ, такъ и по направленію, или: движеніе измѣнится, если скорость измѣнится по величинѣ и направленію.

Причина, обусловливающая измѣненіе величины и направленія скорости данной массы и независимая отъ этой массы, называется силою, приложенною къ данной массѣ.

Вышеприведенное опредѣленіе силы извѣстно подъ именемъ *перваго закона движенія*, который былъ формулированъ Ньютономъ въ слѣдующихъ словахъ:

Тѣло пребываетъ въ состояніи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, если никакая сила, къ нему приложенная, не стремится измѣнить это состояніе.

Разсматривая измѣненіе движенія, какъ слѣдствіе дѣйствія нѣкоторой внѣшней причины, мы тѣмъ самымъ утверждаемъ, что масса не имѣетъ свойства измѣнять свое собственное движеніе. Это отрицательное качество матеріи, состоящее въ *неспособности* измѣнять свое собственное движеніе, носитъ названіе *инерціи* или *косности*. Понятіе объ инерціи очевидно является слѣдствіемъ понятія о силѣ, и наоборотъ, допустивъ сначала инерцію матеріи, мы должны прійти къ понятію о внѣшней причинѣ, нарушающей инерцію. Поэтому на мѣсто перваго закона Ньютона мы можемъ поставить законъ инерціи, формулированный въ такомъ видѣ:

Всякое тѣло имѣетъ свойство, разъ будучи въ покоѣ или въ равномѣрномъ прямолинейномъ движеніи, вѣчно оставаться соотвѣтственно въ томъ или другомъ изъ упомянутыхъ состояній *).

Но такъ какъ, строго говоря, законъ инерціи выражаетъ отрицательное свойство матеріи, то опредѣленіе силы должно быть скорѣе поставлено на первомъ мѣстѣ, а не наоборотъ. Дѣйствительно, опредѣляя силу, мы утверждаемъ,

> что измѣненіе движенія данной массы обусловливается внѣшнею причиною—силою;

а законъ инерціи высказываетъ,

> что матерія сама по себѣ не можетъ измѣнять своего движенія.

Итакъ, представленіе о силѣ, какъ о причинѣ измѣненія движенія, находящейся *внѣ* массы, влечетъ за собою представленіе объ инерціи, какъ объ отсутствіи этой причины *внутри* массы.

Такъ какъ движеніе можетъ измѣняться или черезъ конечные промежутки времени, или непрерывно, то и дѣйствіе силы можетъ

---

*) Законъ инерціи былъ установленъ раньше Ньютона Галилеемъ.

быть или мгновеннымъ и прерывнымъ, или непрерывнымъ. Дѣйствительно, если тѣло, пребывавшее сперва въ покоѣ, потомъ стало двигаться равномѣрно, то это значитъ, что на него подѣйствовала нѣкоторая сила, измѣнившая покой на движеніе. Но пока это тѣло движется далѣе равномѣрно и прямолинейно, на него не дѣйствуетъ никакая сила. Если тѣло черезъ нѣкоторый промежутокъ времени измѣнитъ свою скорость, то это будетъ обусловлено новымъ дѣйствіемъ какой нибудь силы, которая, разъ измѣнивъ движеніе, не продолжаетъ дѣйствовать на тѣло, если оно пойдетъ дальше равномѣрно и прямолинейно. Если скорость тѣла измѣняется непрерывно, т. е. черезъ промежутки времени, которые могутъ быть представлены меньше всякой данной величины, то и силы дѣйствуютъ непрерывно или, что все равно, ихъ дѣйствіе повторяется черезъ безконечно малые промежутки времени.

---

§ 18. Второй законъ Ньютона: опредѣленіе величины силы.

Такъ какъ дѣйствіе силы состоитъ въ измѣненіи скорости массы, то оно будетъ различно, если у различныхъ массъ будутъ различнымъ образомъ измѣняться скорости. Слѣдовательно, на основаніи опредѣленія силы, мы должны отличать разныя силы другъ отъ друга по стольку, по скольку различны массы, на которыя онѣ дѣйствуютъ, и по скольку различны измѣненія скоростей, обусловливаемыя этими силами.

Разсмотримъ сперва, по скольку различаются между собою силы вслѣдствіе различныхъ измѣненій скоростей.

Каждую скорость AB (рис. 43) мы можемъ разсматривать, какъ результирующую нѣкоторыхъ другихъ двухъ скоростей, положимъ, AC и CB. Измѣненіе скорости AB въ скорость AD, мы разсматриваемъ, какъ результатъ прибавленія (геометрическаго) къ скорости AB нѣкоторой новой скорости BD. Внѣшнюю причину описаннаго измѣненія, мы называемъ силою. Но результатъ дѣйствія упомянутой силы, т. е. измѣненіе AB въ AD, мы можемъ себѣ представить, какъ измѣненіе одной изъ слагающихъ отъ AB, положимъ CB,

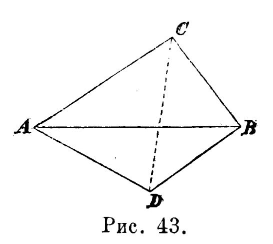


Рис. 43.

въ CD, отъ приложенія скорости BD. Такимъ образомъ одна и та же сила можетъ быть одновременно разсматриваема, какъ причина, измѣняющая на одну и ту же величину BD двѣ различныя скорости, AB или CB, одной и той же движущейся массы. Слѣдовательно, дѣйствіе силы не зависитъ отъ величины той скорости, которая этою силою измѣняется, а поэтому — и отъ дѣйствія другой силы.

Представимъ себѣ, что на нѣкоторую массу дѣйствуетъ непрерывно нѣкоторая сила; тогда скорость движенія должна непрерывно измѣняться, возрастая или убывая. Пусть сила дѣйствуетъ на упомянутую массу непрерывно, въ теченіи нѣкотораго опредѣленнаго промежутка времени, при чемъ первоначальная скорость массы получаетъ нѣкоторое опредѣленное приращеніе; если таже сила будетъ дѣйствовать на туже массу въ теченіи слѣдующаго промежутка времени, равнаго первому, то она, оставаясь сама себѣ равною, сообщитъ массѣ точно такое же приращеніе скорости, какъ прежде, независимо отъ той скорости, которую эта масса уже пріобрѣла. Тоже самое заключеніе сдѣлаемъ для слѣдующаго равнаго промежутка времени, и т. д.. Слѣдовательно, если сила одной и той же величины непрерывно дѣйствуетъ на одну и ту-же массу, то эта послѣдняя получаетъ въ равные, и произвольной величины, промежутки времени, равныя приращенія скорости; т. е. подъ дѣйствіемъ постоянной силы, масса движется съ постояннымъ, по величинѣ и направленію, ускореніемъ. Если направленія ускоренія и первоначальной скорости при этомъ совпадаютъ, то движеніе массы будетъ прямолинейное, равномѣрно ускоренное; если упомянутыя направленія не идутъ по одной и той же прямой, то движеніе будетъ параболическое (см. § 9). Такъ какъ ускореніе всякаго движенія можетъ быть разсматриваемо, какъ постоянное, въ теченіи каждаго безконечно малаго промежутка времени, то и всякая перемѣнная сила можетъ быть разсматриваема какъ постоянная, въ теченіи элемента времени.

Назовемъ черезъ f величину силы, которая, дѣйствуя непрерывно на нѣкоторую массу, сообщаетъ ей, въ опредѣленный безконечно малый промежутокъ времени dt, приращеніе скорости Δv по опредѣленному направленію. Такъ какъ величина f не зависитъ отъ самой измѣняемой скорости, то она не зависитъ и отъ того, будетъ ли измѣняемая скорость одна изъ слагающихъ нѣкоторой результирую-

щей скорости, или самая результирующая. Итакъ, сила f измѣняетъ скорость массы на Δv, или все равно, она измѣняетъ одну изъ слагающихъ этой скорости тоже на Δv. Чтобы измѣнить на Δv, въ то-же время dt и въ томъ же направленіи, другую изъ слагающихъ данной скорости, потребна точно такая же сила f, дѣйствующая на туже массу. Слѣдовательно, чтобы измѣнить заразъ на Δv каждую изъ n слагающихъ скоростей, на которыя мы можемъ разложить данную первоначальную скорость массы, нужно чтобы на эту массу дѣйствовали по одному и тому же направленію, въ теченіи одного и того же времени dt, n одинаковыхъ силъ, каждая равная f, т. е. другими словами, одна сила равная $n.f$. Но если каждая изъ n слагающихъ скоростей измѣнится на Δv, по одному и тому же направленію, то результирующая измѣнится на $n\Delta v$, по тому же направленію. Слѣдовательно, въ n разъ бо́льшая постоянная сила обусловливаетъ въ n разъ бо́льшее приращеніе скорости, въ одно и тоже время. Поэтому, если сила f обусловливаетъ приращеніе скорости Δv, а сила f', дѣйствуя на ту же массу, въ теченіи того же времени dt, обусловливаетъ приращеніе скорости $\Delta v'$, то

$$f : f' = \Delta v : \Delta v'. \tag{3}$$

Но такъ какъ [§ 7, (14)]:

$$\Delta v = gdt, \qquad \Delta v' = g'dt,$$

гдѣ g и g' суть ускоренія, то

$$f : f' = g : g'; \tag{4}$$

т. е. силы, дѣйствующія на равныя массы, относятся, какъ ускоренія, ими обусловливаемыя.

Разсмотримъ теперь, по скольку различаются силы, дѣйствующія на различныя массы.

На основаніи перваго закона Ньютона, всякая масса, скорость которой измѣняется, должна быть разсматриваема, какъ находящаяся подъ дѣйствіемъ силы. Если нѣкоторая масса измѣняетъ свою скорость, то и каждая часть ея тоже измѣняетъ свою скорость; если каждая изъ n равныхъ частей данной массы получаетъ одинаковыя ускоренія, то силы, дѣйствующія на эти части, равны между собою. Вся масса при этомъ получаетъ тоже самое ускореніе, какъ и каждая ея n—ая часть. Такимъ образомъ, описывая одно и тоже дѣйствіе силы, мы можемъ говорить или: n одинаковыхъ силъ дѣйствуютъ

на n частей массы, т. е. на всю массу, или: на туже массу дѣйствуетъ нѣкоторая одна сила; слѣдовательно каждая изъ упомянутыхъ n силъ должна составлять n—ную часть той силы, которая дѣйствуетъ на всѣ n частей массы; т. е., при одномъ и томъ же ускореніи, на массу въ n разъ меньшую, должна дѣйствовать въ n разъ меньшая сила, и наоборотъ. Если слѣдовательно f и f' суть величины силъ, сообщающихъ соотвѣтственно массамъ m и m' одинакія ускоренія, то

$$f : f' = m : m' ; \tag{5}$$

т. е. при одинаковыхъ ускореніяхъ, силы пропорціональны массамъ.

Сравнимъ теперь двѣ силы: одну f, сообщающую массѣ m ускореніе g, и другую f', сообщающую массѣ m' ускореніе g'. Представимъ себѣ нѣкоторую третью силу f'', которая сообшаетъ массѣ m ускореніе g'. Тогда имѣемъ, на основаніи (4):

$$\frac{f}{f''} = \frac{g}{g'} ,$$

а на основаніи (5):

$$\frac{f''}{f'} = \frac{m}{m'} .$$

Перемножая оба послѣднія равенства, находимъ:

$$\frac{f}{f'} = \frac{m\,g}{m'g'} ; \tag{6}$$

т. е. силы, сообщающія различнымъ массамъ различныя ускоренія, относятся между собою, какъ произведенія изъ соотвѣтствующихъ массъ и ускореній.

Если сила f' сообщаетъ единицѣ массы единицу ускоренія, то полагая въ (6):

$$m' = 1 \text{ грам.}, \quad g' = 1 \, \frac{\text{цент.}}{\text{сек.}^2} ,$$

получаемъ:

$$\frac{f}{f'} = m \, . \, g \, . \tag{7}$$

Если силу f' примемъ за единицу, т. е. положимъ, что единица силы сообщаетъ единицѣ массы ускореніе еди-

ницу, то величина всякой другой силы, сравнительно съ установленной такимъ образомъ единицей, будетъ

$$f = mg\,; \tag{8}$$

т. е. въ такомъ случаѣ величина силы измѣряется произведеніемъ изъ массы, на которую она дѣйствуетъ, и ускоренія, которое она этой массѣ сообщаетъ.

Единица силы, опредѣленная вышеупомянутымъ образомъ, называется динамою или диною. Наименованіе дины на основаніи (8) слѣдующимъ образомъ выражается черезъ основныя наименованія длины, времени и массы:

$$\text{дина} = \frac{\text{грам. цент.}}{\text{сек.}^2}\,. \tag{9}$$

Вышеприведенное выраженіе (8), опредѣляющее величину силы, представляетъ второй законъ движенія, формулированный Ньютономъ въ слѣдующихъ словахъ: Измѣненіе движенія пропорціонально приложенной силѣ и происходитъ въ направленіи силы. При этомъ подъ величиною измѣненія движенія должно очевидно разумѣть произведеніе изъ массы и ускоренія.

Тоже самое представленіе о величинѣ измѣненія движенія мы можемъ составить себѣ еще другимъ образомъ. Если нѣкоторая постоянная сила f дѣйствуетъ непрерывно на массу m, въ теченіе промежутка времени t, то результатомъ такого дѣйствія будетъ измѣненіе первоначальной скорости v_0 въ нѣкоторую другую v, при чемъ очевидно

$$g = \frac{v \sim v_0}{t}\,,$$

и слѣдовательно

$$f = \frac{mv \sim mv_0}{t}\,. \tag{10}$$

Произведеніе изъ массы и скорости называется количествомъ движенія, и отъ дѣйствія силы оно очевидно измѣняется. Числитель дроби, въ правой части равенства (10), очевидно представляетъ приращеніе (вообще геометрическое) количества движенія, въ теченіи промежутка времени t; самая же дробь представляетъ приращеніе количества движенія въ единицу времени или, по выраженію Ньютона, измѣненіе движенія.

На основаніи (10) мы можемъ написать:

$$ft = mv \sim mv_0\,, \tag{11}$$

откуда видимъ, что одно и тоже приращеніе количества движенія можетъ быть вообще обусловлено различными силами, которыя дѣйствуютъ въ теченіе различныхъ промежутковъ времени, но такъ, что произведеніе изъ силы и промежутка времени остается одно и тоже. Упомянутое произведеніе ft называется импульсомъ или толчкомъ. Слѣдовательно, величина импульса измѣряется приращеніемъ количества движенія. Увеличивая одновременно силу f въ n разъ и уменьшая во столько же разъ время ея дѣйствія, мы не измѣнимъ величины импульса $nf \cdot \frac{t}{n}$, а слѣдовательно не измѣнимъ и обусловливаемаго имъ приращенія количества движенія. Если n будетъ безконечно велико, то мы получимъ въ результатѣ дѣйствіе нѣкоторой безконечно большой силы, продолжающееся безконечно малое время. Импульсъ, соотвѣтствующій этому дѣйствію, будетъ обусловливать мгновенное приращеніе количества движенія на нѣкоторую замѣтную величину. Слѣдовательно, только безконечно большія мгновенныя силы могутъ производить конечныя измѣненія количества движенія. Очевидно также, что одно и тоже конечное измѣненіе движенія можетъ быть произведено или безконечно большою мгновенною силою, или конечною силою, дѣйствующею въ теченіи конечнаго промежутка времени.

При непрерывномъ перемѣнномъ движеніи скорость измѣняется отъ одного элемента пути къ другому, по величинѣ и направленію; соотвѣтственно измѣняется также и количество движенія mv, и тоже—по величинѣ и направленію. Каждое приращеніе этого количества, которое мы обозначимъ черезъ $\Delta(m \cdot v)$, обусловливается импульсомъ (толчкомъ), сообщаемымъ движущейся массѣ въ направленіи упомянутаго приращенія. Если f будетъ сила, дѣйствующая на массу m, и dt—время, въ теченіи котораго проходится элементъ пути, то

$$f\,dt = \Delta(mv)\,. \tag{12}$$

Какъ и прежде, величина импульса не измѣнится, если сила будетъ увеличена въ n разъ, а время ея дѣйствія во столько же разъ уменьшено, ибо мы будемъ имѣть тогда

$$nf \cdot \frac{dt}{n} = \Delta(mv)\,. \tag{12$'$}$$

Если n сдѣлаемъ больше всякой данной величины, то получимъ дѣйствіе безконечно большой силы nf, продолжающееся такое время, которое безконечно мало въ сравненіи съ выбраннымъ уже безконечно малымъ промежуткомъ dt; т. е. дѣйствіе силы будетъ мгновенное даже по отношенію къ элементу времени dt, и будетъ продолжаться только въ теченіи безконечно малой части этого элемента. Такимъ образомъ мы видимъ, что элементарное приращеніе количества движенія, также какъ и конечное, можетъ быть разсматриваемо, или какъ результатъ непрерывнаго дѣйствія конечной силы f, въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt, или какъ результатъ дѣйствія безконечно большой силы nf, въ теченіи еще безконечно меньшаго промежутка времени $\frac{dt}{n}$. Въ первомъ предположеніи, скорость измѣняется непрерывно въ теченіи времени dt, съ постояннымъ ускореніемъ, и движеніе по элементу есть параболическое. Во второмъ случаѣ скорость измѣняется безконечно малыми скачками, и сила дѣйствуетъ на массу только мгновенно въ началѣ каждаго промежутка времени dt; поэтому движеніе по элементу будетъ тогда прямолинейное и равномѣрное. Но оба вышеприведенныя представленія о дѣйствіи силы на элементахъ пути не отличаются другъ отъ друга существенно, ибо одно изъ нихъ всегда сводится къ другому. Дѣйствительно, каждый изъ безконечно малыхъ параболическихъ отрѣзковъ, представляющійся намъ элементомъ данной траэкторіи, мы можемъ снова разбить на безконечно бóльшее число еще болѣе мелкихъ элементовъ (безконечно малыхъ втораго или высшаго порядка), которые будутъ прямолинейные, на которыхъ движенія будутъ равномѣрны, и скорости будутъ мѣняться безконечно малыми скачками *), вслѣдствіе ряда дѣйствій мгновенныхъ силъ, при началѣ каждаго изъ новыхъ элементовъ. Такимъ образомъ мы приходимъ опять къ тому же заключенію, которое было сдѣлано въ предъидущей главѣ: именно, что всякое движеніе, въ своихъ элементахъ, можетъ быть разсматриваемо, какъ происходящее по безконечно малымъ отрѣзкамъ какихъ угодно кривыхъ линій; это заключеніе вполнѣ аналогично съ геометрическимъ представленіемъ о кривой, какъ о ломанной, составленной изъ безконечно малыхъ

---

*) Скачки эти будутъ безконечно малы въ сравненіи со скачкомъ Δv. Если элементъ разбитъ на безконечно большое число n новыхъ элементовъ, то величина каждаго скачка будетъ $\frac{\Delta v}{n}$.

элементовъ другихъ кривыхъ, изъ которыхъ каждая соприкасается съ данною кривою по одному изъ этихъ элементовъ.

---

§ 19. Сложеніе силъ. Матеріальная частица и точка.

Такъ какъ дѣйствіе силы на массу состоитъ въ сообщеніи этой послѣдней нѣкотораго ускоренія, то слѣдовательно направленіе дѣйствія силы, т. е. самой силы, должно опредѣляться направленіемъ ускоренія ею сообщаемаго.

Если тѣлу сообщаются нѣсколько ускореній по различнымъ направленіямъ, то это обстоятельство обозначаетъ, что на тѣло дѣйствуютъ различныя силы по различнымъ направленіямъ, и на оборотъ—дѣйствіе разныхъ силъ на одну и туже массу обусловливаетъ совмѣстное существованіе различныхъ ускореній; т. е. скорости тѣла по различнымъ направленіямъ испытываютъ различныя измѣненія. Нѣсколько совмѣстныхъ ускореній могутъ быть, по § 6, замѣнены однимъ результирующимъ, равнымъ геометрической суммѣ составляющихъ. Существованіе такого результирующаго ускоренія обусловливаетъ силу, дѣйствующую въ его направленіи. Слѣдовательно, совмѣстное дѣйствіе нѣсколькихъ силъ на данную массу даетъ такой же результатъ, какъ дѣйствіе нѣкоторой одной, которая и называется поэтому *равнодѣйствующею* или *результирующею*. Направленіе равнодѣйствующей совпадаетъ съ направленіемъ результирующаго ускоренія; а величина ея равна (по II закон.) произведенію изъ упомянутаго ускоренія и массы даннаго тѣла.

Графически всякая сила можетъ быть представлена прямою линіею, длина которой заключаетъ въ себѣ столько единицъ длины, сколько изображаемая сила—динъ, и направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ силы. Мѣстомъ приложенія силы будетъ та точка объема массы, которая измѣняетъ свою скорость, или должна ее измѣнять въ направленіи приложенной силы. Если мы разсматриваемъ движеніе различныхъ частей даннаго тѣла, то должны представлять себѣ силы приложенными къ каждой изъ такихъ частей, которыя должны вообразить на сколько возможно малыми. Такъ какъ дѣйствіе одной и той же силы, одинаковое для всѣхъ частей данной массы, не зависитъ отъ формы и величины объема этой послѣдней, то изслѣдуя дан-

ную силу, мы можемъ всегда представлять себѣ, что масса, на которую она дѣйствуетъ, сосредоточена въ безконечно маломъ объемѣ. При этомъ мы слѣдовательно предполагаемъ, что если бы вся масса, заключенная въ безконечно маломъ объемѣ, была распредѣлена однородно въ какомъ либо конечномъ объемѣ, то подъ дѣйствіемъ той же самой силы она будетъ двигаться всѣми своими частями такъ-же, какъ прежде. Такимъ образомъ мы приходимъ къ представленію о матеріальной частицѣ, какъ о массѣ (конечной или безконечно малой величины), сосредоточенной въ безконечно маломъ объемѣ. Всякую данную массу мы можемъ представлять себѣ поэтому, какъ собраніе матеріальныхъ частицъ. Однако не должно смѣшивать представленія о матеріальной частицѣ съ представленіемъ о точкѣ. Какъ бы мала ни была частица, она всегда занимаетъ нѣкоторый объемъ, который никогда не можетъ быть представленъ точкою, ибо понятія объ объемѣ и точкѣ суть совершенно разнородныя. Какъ поверхность не можетъ обратиться въ линію, линія во время, время въ массу, такъ и объемъ не превратится въ точку, а останется всегда объемомъ, какъ-бы мы его ни уменьшали въ нашемъ представленіи.

Вообразимъ нѣкоторую геометрическую точку, принадлежащую объему, занимаемому данною массою. Эта точка должна перемѣщаться и получать ускоренія вмѣстѣ съ массою. Такъ какъ, при одной и той же силѣ, ускореніе данной массы очевидно не зависитъ отъ величины и формы ея объема, то и ускоренія вышеупомянутой точки будутъ обусловливаться только величиною силы, дѣйствующей на данную массу и величиною массы, каковы бы ни были величина и форма объема этой послѣдней. Такимъ образомъ мы можемъ представить себѣ геометрическую точку, движеніе которой, при данной силѣ, обусловливается массою, наполняющею тотъ объемъ, куда принадлежитъ упомянутая точка. Такого рода точка называется матеріальною точкою. Мы не можемъ, слѣдовательно, говорить о матеріи сосредоточенной въ данной матеріальной точкѣ, ибо матерія должна занимать всегда нѣкоторый объемъ; но мы можемъ говорить о массѣ данной матеріальной точки, какъ о массѣ, связанной съ этою послѣднею и наполняющей объемъ, къ которому принадлежитъ данная точка. Очевидно, что понятія о матеріальной частицѣ и матеріальной точкѣ существенно другъ отъ друга разнятся. Частица можетъ имѣть опредѣленную форму и опредѣленную плот-

ность; матеріальная точка связана только съ опредѣленною массою, форма и плотность которой могутъ быть представляемы произвольно.

Изъ предъидущаго заключаемъ, что матеріальная точка можетъ представлять массу, какой угодно величины и какого угодно объема, лишь-бы при этомъ движенія ея отдѣльныхъ частей не отличались другъ отъ друга. Если движенія различныхъ частей даннаго тѣла различны, то мы можемъ представить себѣ это послѣднее, какъ совокупность нѣсколькихъ массъ, движенія частей которыхъ одинаковы. Движеніе каждой изъ такихъ массъ мы можемъ замѣнить движеніемъ нѣкоторой матеріальной точки, и всякое тѣло, такимъ образомъ, разсматривать, какъ совокупность матеріальныхъ точекъ. Части тѣла, движенія которыхъ разсматриваются, какъ движенія матеріальныхъ точекъ, могутъ быть или конечны, или безконечно малы; въ послѣднемъ случаѣ матеріальная точка будетъ представлять матеріальную частицу, т. е. будетъ связана съ ея массою. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ приходится разсматривать и самую матеріальную частицу, какъ совокупность различныхъ матеріальныхъ точекъ: именно тогда, когда различныя части этой частицы имѣютъ различныя движенія.

Итакъ, мы можемъ графически представлять силу, по величинѣ и направленію линіей, а объектъ дѣйствія силы—геометрическою точкою, которую должны воображать связанною съ нѣкоторой массою.

Представимъ себѣ (рис. 44) двѣ силы AB и AC, приложенныя къ точкѣ A. Если m будетъ величина массы, связанной съ этою точкою, то длины Ab и Ac, отложенныя на силахъ и въ m разъ меньшія длины AB и AC, будутъ представлять соотвѣтственно ускоренія отъ обѣихъ данныхъ силъ. Геометрическая сумма линій Ab и Ac, представляемая линіей Ad, даетъ намъ величину и направленіе результирующаго ускоренія. Наконецъ, удлиннивъ линію Ad въ m разъ, мы получимъ AD, которая должна представить равнодѣйствующую двухъ данныхъ силъ. Но такъ какъ

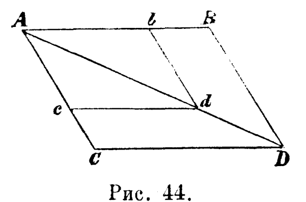


Рис. 44.

$$\frac{AB}{Ab}=\frac{AC}{Ac}=\frac{AD}{Ad}=m\ ,$$

то AB и Ab, AC и Ac взаимно параллельны, и слѣдовательно AD, будучи діагональю параллелограмма, построеннаго на AB и AC, пред-

ставитъ геометрическую сумму этихъ двухъ линій. Итакъ, равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ къ одной и той-же точкѣ, представляется, по величинѣ и направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на упомянутыхъ силахъ, какъ на сторонахъ. Слѣдовательно вообще: равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, есть геометрическая сумма всѣхъ слагающихъ *).

Если равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ данной матеріальной точкѣ, будетъ нуль, то такія силы называются взаимно уравновѣшивающимися. Слѣдовательно, взаимно уравновѣшивающіяся силы не производятъ всѣ вмѣстѣ никакого измѣненія движенія или покоя матеріальной точки. Если на массу, находящуюся подъ дѣйствіемъ взаимно уравновѣшивающихся силъ, подѣйствуетъ новая сила, то дѣйствіе этой послѣдней будетъ таково, какъ будто упомянутыя прежде силы вовсе не существовали.

Очевидно также, что импульсы силы, измѣряясь произведеніемъ изъ массы и сообщенной импульсомъ прибавочной скорости, слагаются геометрически также, какъ скорости, ускоренія и силы; т. е. если AB и AC (рис. 44) представляютъ, по величинѣ и направленію, два импульса, то AD представить результирующій импульсъ.

Нѣкоторые авторы дѣлаютъ различіе между понятіями, лежащими въ основаніи сложенія скоростей и ускореній, съ одной стороны,—и сложенія импульсовъ и силъ, съ другой стороны. Сложеніе скоростей и ускореній основано на свойствахъ проэктируемой линіи и ея проэкцій; правило сложенія есть слѣдствіе опредѣленія слагающихъ. Сложеніе-же силъ и импульсовъ требуетъ, по мнѣнію иныхъ, еще доказательства слѣдующаго положенія: если двѣ какія-либо причины, дѣйствуя порознь, обусловливаютъ извѣстныя приращенія скорости или ускоренія, то тѣже причины, дѣйствуя совмѣстно, обусловятъ результирующія скорости или ускоренія, т. е. геометрическую сумму тѣхъ или другихъ. Это положеніе также можетъ быть принято, какъ аксіома или какъ опытный законъ. Но дѣло въ томъ, что вышеприведенное положеніе, строго говоря, не представляетъ собою ни аксіомы, ни опытнаго закона, но есть непосредствен-

*) Это положеніе само собою явно слѣдуетъ изъ того, что сила представляется по величинѣ и направленію прямою (см. § 4).

ное слѣдствіе опредѣленія силы и импульса. Дѣйствительно, такъ какъ сила или импульсъ опредѣляются, отвлекаясь отъ массы, только ускореніемъ или приращеніемъ скорости, то дѣйствіе двухъ силъ или импульсовъ можно назвать тогда только совмѣстнымъ, когда въ результатѣ получается геометрическая сумма ускореній или импульсовъ. Въ противномъ случаѣ, т. е. когда въ результатѣ предполагаемаго нами совмѣстнаго дѣйствія двухъ силъ или двухъ импульсовъ не получаются результирующія ускоренія и скорости, мы говоримъ, что къ дѣйствію данныхъ силъ прибавляется дѣйствіе новыхъ, и притомъ такъ, что ускоренія этихъ послѣднихъ, сложенныя геометрически съ ускореніями данныхъ силъ, давали-бы результирующее ускореніе. Другими словами, исходя изъ принципа независимости дѣйствія силъ другъ отъ друга и отъ начальныхъ скоростей (см. начало § 18), мы приходимъ къ опредѣленію понятія о совмѣстномъ дѣйствіи двухъ силъ или импульсовъ, какъ о дѣйствіи ихъ геометрической суммы.

---

§ 20. Третій законъ Ньютона: источникъ силы.

При всѣхъ физическихъ явленіяхъ, наблюдаемое измѣненіе движенія одного какого нибудь тѣла, а слѣдовательно и существованіе нѣкоторой силы, дѣйствующей на это тѣло, обусловливается присутствіемъ другаго матеріальнаго тѣла, которое поэтому и разсматривается, какъ источникъ силы, дѣйствующей на первое тѣло. На этомъ основаніи мы, предполагая существованіе силы, какъ внѣшней причины измѣненія движенія массы, не ищемъ эту причину внѣ доступнаго наблюденію матеріальнаго міра. Если на тѣло дѣйствуетъ сила, то мы не можемъ допустить, что она является изъ невѣдомаго, непричастнаго матеріи источника, ибо такое допущеніе ничего намъ не объясняло-бы. Напротивъ, мы предполагаемъ, что существованіе силы обусловливается такими явленіями (помимо ея дѣйствія), которыя могутъ быть нами наблюдаемы, или, согласно съ наблюденіями представляемы. Другими словами, измѣненіе движенія одного тѣла мы связываемъ съ другими доступными наблюденію аналогичными явленіями, не выходящими однако изъ круга представленій о массѣ и движеніи, напримѣръ—съ движеніемъ другаго тѣла относительно перваго.

Вообразивъ единственную матеріальную точку среди безграничнаго пространства, мы не можемъ себѣ представить какую либо силу, дѣйствующую на нее, ибо не можемъ представить и понять движенія этой точки, а слѣдовательно и измѣненія его, не имѣя другихъ точекъ, которыя позволили-бы намъ отмѣтить различныя положенія первой.

Чтобы понять движеніе одной матеріальной точки, намъ необходимо представить себѣ по крайней мѣрѣ еще другую матеріальную точку, относительно которой движеніе первой могло-бы существовать. Вообразивъ только двѣ матеріальныя точки въ пространствѣ, мы можемъ отмѣтить, а слѣдовательно и представить себѣ ихъ движеніе только по стольку, по скольку измѣняется ихъ взаимное разстояніе (см. § 5). Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ можетъ быть понятна только сила, дѣйствующая на какую либо изъ двухъ точекъ, въ ту или другую сторону по линіи ихъ взаимнаго разстоянія. Итакъ, если мы имѣемъ двѣ точки A и B, и говоримъ, что на точку A дѣйствуетъ нѣкоторая сила, то это утвержденіе не можетъ имѣть другаго смысла, кромѣ допущенія нѣкотораго ускоренія точки A въ какую нибудь сторону, вдоль по линіи AB. Такъ какъ мы не можемъ допустить и понять эту силу безъ присутствія точки B, то и относимъ ея источникъ къ этой точкѣ, говоря, что точка B д ѣ й с т в у е т ъ на точку A. Но съ другой стороны, если A получаетъ ускореніе относительно B, то и B, мѣняя свое положеніе относительно A, должна получать соотвѣтствующее ускореніе. Отсюда вытекаетъ необходимость допущенія, что точка A въ свою очередь дѣйствуетъ на точку B. Слѣдовательно, представленіе о силѣ, дѣйствующей на A и зависящей отъ B, влечетъ за собою представленіе о другой силѣ, дѣйствующей на B и зависящей отъ A. Такія двѣ силы называются в з а и м н ы м и, и только такія силы мы можемъ представить дѣйствующими на двѣ точки, находящіяся въ пространствѣ безъ присутствія другихъ матеріальныхъ точекъ.

Представимъ теперь себѣ, что система, состоящая изъ двухъ матеріальныхъ точекъ, сдѣлалась н е и з м ѣ н н о ю, т. е. сдѣлалось невозможнымъ измѣненіе взаимнаго разстоянія этихъ точекъ. Въ такомъ случаѣ условія существованія взаимныхъ силъ останутся, ибо будутъ существовать обѣ точки A и B; но условія проявленія дѣйствія обѣихъ силъ уничтожатся, ибо разстояніе между A и B останется неизмѣннымъ. Поэтому взаимныя силы въ данномъ случаѣ, не измѣнившись по величинѣ

и направленію, должны уравновѣшивать другъ друга. Но, въ случаѣ неизмѣняемости разстоянія AB, всякая сила, приложенная къ A по линіи AB, можетъ быть разсматриваема, какъ приложенная къ B, ибо всякое перемѣщеніе A, по AB, должно повлечь за собою, вслѣдствіе неизмѣнности AB, такое-же перемѣщеніе точки B, и въ туже сторону. Слѣдовательно, обѣ взаимныя силы могутъ быть разсматриваемы, при условіи неизмѣнности разстоянія AB, какъ приложенныя или къ одной точкѣ A, или къ одной точкѣ B. Такъ какъ эти силы должны быть въ равновѣсіи, то онѣ должны быть другъ другу равны и противоположны. Если-бы это послѣднее условіе не выполнялось, то двѣ вышеупомянутыя силы имѣли-бы равнодѣйствующую отличную отъ нуля, вслѣдствіе чего ея точка приложенія, а слѣдовательно и связанная съ нею неизмѣнно другая точка, пришли-бы въ движеніе; но это движеніе не могло бы быть слѣдствіемъ взаимныхъ силъ, такъ какъ ихъ дѣйствіе устранено по условію неизмѣнностію разстоянія AB; никакой другой силы, кромѣ взаимныхъ мы не предполагаемъ въ данномъ случаѣ; слѣдовательно, имѣли-бы ускореніе безъ дѣйствія силы, что противорѣчило-бы первому закону движенія.

Точно также, въ случаѣ существованія третьей точки C, движеніе двухъ первыхъ, A и B, безъ измѣненія ихъ взаимнаго разстоянія AB, можетъ быть представлено по стольку, по скольку измѣняются ихъ растоянія AC и BC отъ третьей точки. Разсуждая также, какъ прежде, мы прійдемъ къ заключенію, что матеріальная точка C можетъ дѣйствовать на точки A и B только по линіямъ разстояній AC и BC, и что силы, съ которыми дѣйствуютъ другъ на друга точка C и какая либо изъ точекъ A и B, равны и противоположны. Вообще, сколько-бы ни было матеріальныхъ точекъ, силы, съ которыми дѣйствуютъ другъ на друга каждыя двѣ изъ этихъ точекъ, могутъ быть только направлены по линіи взаимнаго разстоянія этихъ послѣднихъ, и должны быть равны другъ другу и противоположны. Это заключеніе мы выводимъ изъ того обстоятельства, что дѣйствіе двухъ точекъ другъ на друга не измѣняется присутствіемъ другихъ матеріальныхъ точекъ, ибо различныя силы дѣйствуютъ независимо другъ отъ друга (см. § 18), и каждая сила сообщаетъ данной массѣ опредѣленное ускореніе независимо отъ того, дѣйствуютъ-ли на эту массу еще другія силы, или нѣтъ. Слѣдовательно, каждыя двѣ матеріальныя точки будутъ дѣйствовать другъ на друга въ присутствіи другихъ то-

чекъ также, какъ онѣ дѣйствовали-бы, будучи попарно изолированы въ пространствѣ; а такое ихъ взаимодѣйствіе нами уже разсмотрѣно прежде.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію, извѣстному подъ именемъ третьяго закона движенія, и формулированнаго Ньютономъ въ слѣдующихъ словахъ: всякому дѣйствію всегда есть равное и обратное противодѣйствіе; т. е. дѣйствія двухъ тѣлъ другъ на друга всегда равны и направлены въ противоположныя стороны. Этотъ законъ, какъ мы видимъ изъ хода разсужденій, приводящихъ къ нему, является распространеніемъ перваго закона движенія, т. е. опредѣленія силы, какъ внѣшней причины измѣненія движенія массы. Какія бы силы, наблюдаемыя въ природѣ, мы ни имѣли въ виду, онѣ должны слѣдовать закону дѣйствія равнаго противодѣйствію, ибо иныхъ силъ мы не можемъ себѣ представить.

Если мы наблюдаемъ, что одно тѣло притягиваетъ или отталкиваетъ другое, то мы должны заключить, что и другое тѣло притягиваетъ или отталкиваетъ первое. Если-бы этого слѣдствія не было, то мы не имѣли-бы права заключать, что сила, дѣйствующая на первое тѣло, состоитъ въ притяженіи или отталкиваніи его вторымъ тѣломъ. Если мы говоримъ, что одно тѣло давитъ на другое, то это значитъ, что другое тѣло точно также давитъ на первое. Если палецъ упираетъ въ стѣну, то и стѣна упираетъ въ палецъ. Если лошадь тащитъ возъ, то возъ оттягиваетъ лошадь назадъ; обѣ силы уравновѣшиваются, ибо нѣтъ относительнаго движенія воза и лошади; движеніе-же воза и лошади происходитъ равномѣрно, какъ слѣдствіе первоначальнаго импульса. Если одно тѣло, ударяясь о другое, приводитъ его въ движеніе, то это послѣднее въ свою очередь измѣняетъ движеніе перваго тѣла.

Если f_1 и f_2 будутъ взаимныя силы, съ которыми двѣ массы m_1 и m_2 дѣйствуютъ другъ на друга, то очевидно, на основаніи третьяго закона:

$$f_1 + f_2 = 0; \tag{13}$$

слѣдовательно, если g_1 и g_2 будутъ соотвѣтствующія ускоренія, то

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{g_1}{g_2} = -\frac{m_2}{m_1}; \tag{14}$$

т. е. для каждой пары взаимныхъ силъ соотвѣтству-

ющія ускоренія обратно пропорціональны массамъ, къ которымъ они приложены, и направлены въ противоположныя стороны. Если слѣдовательно камень, притягиваясь землею, на нее падаетъ, то и земля въ свою очередь должна притягиваться камнемъ и на него падать. Но такъ какъ масса камня несравненно меньше массы земли, то ускореніе этой послѣдней, при ея движеніи къ камню, будетъ несравненно мало передъ ускореніемъ камня.

---

§ 21. Сохраненіе количества движенія.

Представимъ себѣ нѣсколько свободныхъ матеріальныхъ точекъ, съ массами m_1, $m_2 \ldots m_n$, движущихся подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ. Пусть для даннаго момента времени $f_1, f_2 \ldots f_n$ будутъ равнодѣйствующія силы, приложенныя соотвѣтственно къ упомянутымъ массамъ, и составленныя изъ силъ, направленныхъ по разстояніямъ каждой массы отъ всѣхъ остальныхъ. Если число всѣхъ матеріальныхъ точекъ есть n, то каждая изъ упомянутыхъ силъ будетъ составлена изъ $n-1$ составляющихъ. На основаніи третьяго закона очевидно, что одна изъ составляющихъ силы f_1 будетъ равна и противоположна одной изъ составляющихъ силы f_2, другая изъ составляющихъ силы f_1 будетъ равна и противоположна одной изъ составляющихъ силы f_3, и т. д.; каждая изъ составляющихъ силы f_1 будетъ равна и противоположна какой нибудь изъ составляющихъ другихъ силъ; тоже самое скажемъ и о всѣхъ составляющихъ любой изъ остальныхъ данныхъ силъ. Слѣдовательно геометрическая сумма всѣхъ силъ f_1, $f_2 \ldots f_n$, какъ составленныхъ изъ равныхъ и противоположныхъ слагающихъ, должна быть для каждаго момента времени равна нулю; т. е.

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 0, \tag{15}$$

или, если g_1, $g_2 \ldots g_n$ будутъ ускоренія соотвѣтствующихъ матеріальныхъ точекъ, то

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + m_3 g_3 + \cdots m_n g_n = 0, \tag{16}$$

гдѣ сумма опять берется геометрическая. Такъ какъ по § 4 сумма проложеній силъ $f_1 \ldots f_n$ (геом. сумма которыхъ есть нуль) на всякую прямую будетъ тоже нуль, то обозначая черезъ X_1, $X_2 \ldots X_n$, $Y_1 \ldots Y_n$, $Z_1 \ldots Z_n$ слагающія каждой изъ данныхъ силъ f по осямъ

координатъ, мы будемъ имѣть:

$$\Sigma X = 0\,, \quad \Sigma Y = 0\,, \quad \Sigma Z = 0\,, \tag{15'}$$

и точно также, обозначая черезъ g_x, g_y, g_z слагающія ускоренія по тѣмъ-же осямъ:

$$\Sigma m g_x = 0\,, \quad \Sigma m g_y = 0\,, \quad \Sigma m g_z = 0\,, \tag{16'}$$

при чемъ суммы въ (15)' и (16)' берутся очевидно алгебраическія.

Если масса одного изъ тѣлъ системы, движущейся подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, будетъ несравненно больше суммы массъ остальныхъ тѣлъ той-же системы, то изъ (16) видно, что ускореніе этого тѣла будетъ несравненно меньше каждаго изъ ускореній другихъ тѣлъ. Такой случай мы имѣемъ въ солнечной системѣ, гдѣ масса солнца несравненно больше массы всѣхъ планетъ, взятыхъ вмѣстѣ; вслѣдствіе этого и движеніе солнца отъ совокупнаго дѣйствія планетъ настолько мало, что мы безъ большой погрѣшности можемъ разсматривать движеніе солнечной системы подъ дѣйствіемъ ея взаимныхъ силъ, какъ обращенія планетъ около неподвижнаго солнца.

Умножая каждый членъ суммы (16) на элементъ времени dt, мы получаемъ, обозначая черезъ Σ операцію геометрическаго суммованія:

$$\Sigma m g dt = 0\,, \tag{17}$$

гдѣ сумма берется геометрически. Но для каждой матеріальной точки m величина $mgdt$ представляетъ приращеніе (геометрическое) количества движенія въ теченія времени dt, т. е.:

$$m g dt = \Delta(mv)\,.$$

Вслѣдствіе этого (17) принимаетъ видъ:

$$\Sigma\Delta(mv) = 0\,; \tag{18}$$

т. е. геометрическая сумма приращеній количества движенія системы матеріальныхъ точекъ, находящихся подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, равна нулю для каждаго момента времени.

Слѣдовательно, геометрическая сумма количествъ движенія для такой системы сохраняется постоянною, и можетъ быть измѣнена очевидно только дѣйствіемъ нѣкоторой внѣшней силы.

Такимъ образомъ, если для одного момента движенія скорости точекъ системы будутъ v_1, v_2, $v_3 \ldots$, а для другаго: v_1', v_2', $v_3' \ldots v_n$, то

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots m_n v_n = m_1 v_1' + m_2 v_2' + \cdots m_n v_n'. \qquad (19)$$

§ 22. Центръ инерціи.

Разсмотримъ геометрическое значеніе суммы количествъ движенія.

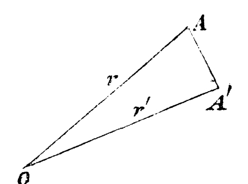


Рис. 45.

Представимъ себѣ нѣкоторую движущуюся точку A (рис. 45), разстояніе которой отъ нѣкоторой неподвижной точки O пусть будетъ r. Когда движущаяся точка перейдетъ изъ A въ A', то ея новое разстояніе r' отъ O будетъ очевидно геометрической суммою прежняго разстоянія r и пройденнаго пути AA'. Слѣдовательно мы можемъ разсматривать AA', какъ геометрическое приращеніе разстоянія движущейся точки отъ нѣкоторой произвольной неподвижной точки O. Если скорость движущейся точки есть v, а время ея движенія по AA' есть dt, то $AA' = vdt$.

Если m будетъ масса движущейся точки, то произведеніе mr можно разсматривать, какъ сумму (алгебраическую) разстояній каждой единицы массы отъ точки O. Въ такомъ случаѣ $mvdt$ представится очевидно геометрическимъ приращеніемъ разстояній всѣхъ единицъ массъ отъ точки O.

Представимъ себѣ теперь нѣсколько матеріальныхъ точекъ съ массами m_1, m_2 и т. д., на разстояніяхъ r_1, r_2 и т. д. отъ нѣкотораго произвольнаго центра O. Проведемъ изъ этого центра линіи къ каждой единицѣ массы. Тогда число такихъ линій будетъ $m_1 + m_2 + \ldots m_n$, а ихъ геометрическая сумма будетъ очевидно равна геометрической суммѣ линій, длины которыхъ будутъ $m_1 r_1$, $m_2 r_2 \ldots$ и т. д., въ направленіяхъ разстояній r_1, $r_2 \ldots$ и т. д. Если v_1 будетъ скорость массы m_1 для даннаго момента времени, то въ теченіи элемента времени dt, слѣдующаго за упомянутымъ моментомъ времени, масса m_1 перемѣстится на $v_1 dt$ въ направленіи скорости v_1, и ея разстояніе r_1 отъ O прирастетъ геометрически на $v_1 dt$. Сумма разстояній отъ точки O всѣхъ массовыхъ единицъ, заключающихся въ массѣ m_1, т. е. m_1—краткое разстояніе r_1, или $m_1 r_1$,

приростетъ въ это время геометрически на $m_1 v_1 dt$. Слѣдовательно, геометрическая сумма всѣхъ m—кратныхъ разстояній соотвѣтствующихъ массъ отъ O, или геометрическая сумма разстояній отъ O всѣхъ массовыхъ единицъ, возрастетъ геометрически на $(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots m_n v_n)\, dt$. Если линіи OA и OB (рис. 46) представятъ геометрическія суммы разстояній отъ O массовыхъ единицъ данной системы, въ началѣ и концѣ элемента времени dt, то AB представитъ геометрическую сумму $\Sigma mvdt$. Отсюда заключаемъ, что $\frac{AB}{dt}$, т. е. геометрическая сумма Σmv количествъ движенія матеріальныхъ точекъ данной системы, выражаетъ по величинѣ и направленію скорость движенія конца радіуса вектора, представляющаго, для каждаго момента времени, геометрическую сумму разстояній массовыхъ единицъ системы отъ точки O.

Рис. 46.

Если матеріальныя точки системы находятся только подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, то Σmv остается неизмѣнною; слѣдовательно упомянутая выше скорость постоянна по величинѣ и по направленію, и движеніе конца радіуса вектора есть прямолинейное и равномѣрное. Поэтому, если линіи OA, OB, $OC\ldots$ (рис. 47) будутъ представлять геометрическія суммы разстояній массовыхъ единицъ отъ O, взятыя черезъ нѣкоторые равные промежутки времени, то концы A, B, C, $D\ldots$ этихъ линій будутъ лежать на одной и той-же прямой AD, и раздѣлятъ ее на равныя части.

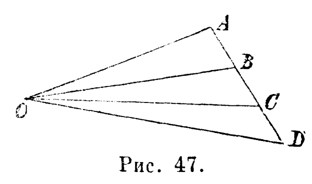


Рис. 47.

Пусть r_1 будетъ разстояніе (рис. 48) матеріальной точки m_1 отъ нѣкотораго неподвижнаго центра O и r_1'—разстояніе той-же точки отъ другаго центра O'. Тогда очевидно

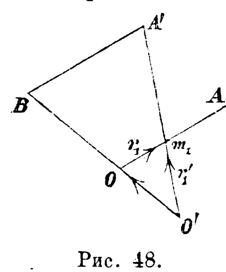


Рис. 48.

$$r_1' = O'O + r_1\,,$$

гдѣ сумма берется геометрически, и слѣдовательно

$$m_1 r_1' = m_1 O'O + m_1 r_1\,;$$

т. е. очевидно, если

$$OA = m_1 r_1\,, \qquad O'A' = m_1 r_1'\,, \qquad OB = m_1 O'O\,,$$

то

$$BA' = m_1 r_1 = OA\,.$$

написавъ такимъ образомъ рядъ равенствъ:

$$m_1 r_1' = m_1 O'O + m_1 r_1\,,$$
$$m_2 r_2' = m_2 O'O + m_2 r_2\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$m_n r_n' = m_n O'O + m_n r_n\,,$$

для всѣхъ точекъ системы, и сложивъ ихъ геометрически находимъ

$$\Sigma m r' = O'O\,\Sigma m + \Sigma m r\,, \qquad (20)$$

гдѣ суммы берутся геометрически отъ всѣхъ величинъ, разнящихся другъ отъ друга по направленіямъ. Выраженіе (20) даетъ намъ средство, зная геометрическую сумму разстояній массовыхъ единицъ отъ одной точки O, построить сумму подобныхъ-же разстояній отъ другой точки O'. Дѣйствительно, пусть линія OA (рис. 49) представляетъ Σmr, и пусть O' будетъ нѣкоторая неподвижная точка. Откладываемъ въ направленіи $O'O$ длину OB, равную $O'O\Sigma m$, и изъ B проводимъ линію BA', параллельную и равную OA. Тогда очевидно:

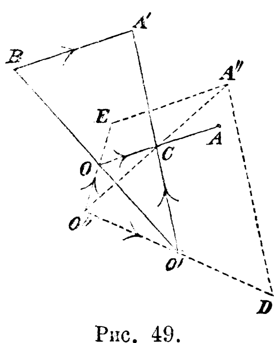


Рис. 49.

$$O'A' = O'B + BA',$$

и слѣдовательно

$$O'A' = \Sigma m r'.$$

Изъ подобія треугольниковъ $O'OC$ и $O'BA'$ мы видимъ, что

$$\frac{O'B}{O'O} = \frac{OA}{OC} = \frac{O'A'}{O'C}\,; \qquad \text{но } \frac{O'B}{O'O} = \Sigma m\,;$$

слѣдовательно:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{O'A'}{O'C} = \Sigma m\,, \quad \text{и} \quad OC = \frac{\Sigma m r}{\Sigma m}\,, \quad O'C = \frac{\Sigma m r'}{\Sigma m}\,; \qquad (21)$$

т. е. обѣ линіи, OA и $O'A'$, дѣлятся въ точкѣ C въ одинаковомъ отношеніи $\Sigma m : 1$, которое не зависитъ ни отъ длины, ни отъ положенія обѣихъ линій. Слѣдовательно, всякая третья линія $O''A''$, представляющая геометрическую сумму разстояній массовыхъ единицъ отъ

третьей точки O'', пройдетъ тоже черезъ точку C, ибо эта линія должна раздѣлить обѣ линіи, $O'A'$ и OA, и сама раздѣлиться опять въ томъ-же отношеніи $\Sigma m : 1$ *).

Итакъ, всѣ линіи, представляющія въ данный моментъ времени геометрическія суммы разстояній массовыхъ единицъ системы отъ различныхъ неподвижныхъ точекъ, проходятъ черезъ одну точку, которая называется *центромъ инерціи* данной системы. Или, изъ (21): центръ инерціи есть такая точка, разстояніе которой отъ нѣкоторой неподвижной точки есть геометрически взятое среднее изъ всѣхъ разстояній отъ той-же точки всѣхъ массовыхъ единицъ системы.

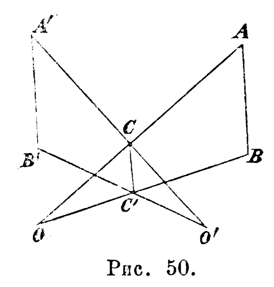


Рис. 50.

Если OA и $O'A'$ будутъ (рис. 50) геометрическія суммы упомянутыхъ разстояній отъ точекъ O и O', для даннаго момента времени, а OB и $O'B'$—подобныя-же суммы, черезъ промежутокъ времени dt, то C и C' будутъ положенія центра инерціи системы для начала и конца времени dt. Кромѣ того, такъ какъ

$$\frac{OA}{OC} = \frac{O'A'}{O'C} = \frac{OB}{OC'} = \frac{O'B'}{O'C'} = \Sigma m$$

и

$$A'B = AB = \Sigma mvdt\,,$$

то

$$CC' = \frac{\Sigma mvdt}{\Sigma m}\,; \tag{22}$$

т. е. центръ инерціи системы перемѣщается со скоростію, равною средней скорости всѣхъ ея массовыхъ единицъ. Кромѣ того: если система находится только подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, то ея центръ инерціи остается въ покоѣ или движется равномѣрно.

Если мы обозначимъ черезъ V скорость центра инерціи, то по (22) будемъ имѣть:

$$V = \frac{\Sigma mv}{\Sigma m} : \quad \text{или} \quad V\Sigma m = \Sigma mv\,; \tag{23}$$

---

*) При этомъ очевидно на рисункѣ:

$$O''D = O''O'\Sigma m\,, \quad O''E = O''O\Sigma m\,, \quad DA'' = O'A'\,, \quad EA'' = OA.$$

т. е. **количество движенія всей системы равно количеству движенія центра инерціи, въ которомъ предполагается сосредоточенною вся масса системы.**

Выше мы видѣли, что положеніе центра инерціи не зависитъ отъ положенія точки O, отъ которой мы откладываемъ среднее разстояніе массовыхъ единицъ системы, т. е. что упомянутое разстояніе, отложенное отъ любой точки O, приводитъ всегда къ одному и тому-же центру C. Отсюда видно, что **положеніе центра инерціи обусловливается только распредѣленіемъ матеріальныхъ точекъ системы.** Разсмотримъ эту зависимость.

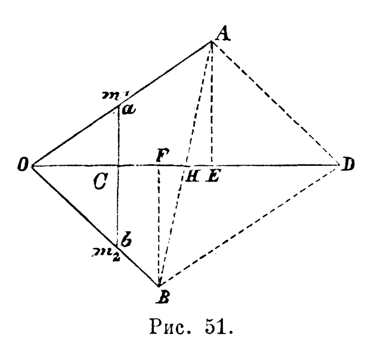


Рис. 51.

Пусть a и b (рис. 51) будутъ матеріальныя точки, съ массами m_1 и m_2. Откладывая отъ какой нибудь точки O длины

$$OA = m_1 \,.\, Oa \quad \text{и} \quad OB = m_2 \,.\, Ob$$

и складывая геометрически линіи OA и OB, мы получаемъ въ результатѣ линію OD, представляющую геометрическую сумму разстояній массовыхъ единицъ, содержащихся въ $m_1 + m_2$, отъ точки O. Проводя линіи AE и BF параллельно ab, мы находимъ, что $AE = BF$, и кромѣ того:

$$\frac{aC}{AE} = \frac{Oa}{OA} = \frac{1}{m_1}, \qquad \frac{bC}{BF} = \frac{Ob}{OB} = \frac{1}{m_2},$$

откуда

$$aC : bC = m_2 : m_1 \quad \text{и} \quad aC \,.\, m_1 = bC \,.\, m_2 \,;$$

т. е. линія OD дѣлитъ въ точкѣ C разстояніе ab на части. обратно пропорціональныя прилегающимъ къ нимъ массамъ. Затѣмъ:

$$OE = m_1 OC \quad \text{и} \quad OF = m_2 OC \,;$$

откуда:

$$OE + OF = OC\,(m_1 + m_2)\,;$$

но очевидно:

$$OE + OF = OD\,;$$

слѣдовательно:

$$OC = \frac{OD}{m_1 + m_2}\,;$$

т. е. точка C есть центръ инерціи массъ m_1 и m_2. Итакъ, центръ инерціи двухъ матеріальныхъ точекъ лежитъ на линіи, соединяющей обѣ точки, которую онъ дѣлитъ внутренно на части, обратно пропорціональныя прилегающимъ массамъ.

Если кромѣ двухъ точекъ a и b у насъ есть еще третья матеріальная точка m_3, то для нахожденія центра инерціи трехъ точекъ мы должны прежде всего сложить геометрически m_3—краткое разстояніе третьей точки отъ O съ линіей OD. Но такъ какъ $OD = (m_1 + m_2)\,OC$, то очевидно, что нахожденіе центра инерціи трехъ массъ m_1, m_2 и m_3 сводится къ опредѣленію центра инерціи двухъ массъ: съ одной стороны—массы m_3, а съ другой—массы $(m_1 + m_2)$, помѣщенной въ точкѣ C, т. е. въ центрѣ инерціи обѣихъ массъ m_1 и m_2. Такимъ образомъ, зная центръ инерціи C числа n матеріальныхъ точекъ, мы найдемъ центръ инерціи $n+1$ матеріальныхъ точекъ, вообразивъ въ C всю массу n точекъ, проводя разстояніе отъ C до m_{n+1}, и раздѣливъ его внутренно въ обратномъ отношеніи къ массамъ, помѣщеннымъ въ C и въ m_{n+1}. Слѣдовательно вообще: общій центръ инерціи нѣсколькихъ группъ матеріальныхъ точекъ есть въ тоже время центръ инерціи массовыхъ количествъ каждой изъ данныхъ группъ, размѣщенныхъ соотвѣтственно въ центрахъ инерціи этихъ послѣднихъ.

Тѣже самыя заключенія слѣдуютъ непосредственно и изъ форм. (21), дающей общее опредѣленіе центра инерціи. Именно, выбирая точку O въ центрѣ инерціи, мы будемъ имѣть въ (21): $OC = 0$; а слѣдовательно для центра инерціи

$$\Sigma mr = 0\,. \tag{24}$$

Въ случаѣ двухъ точекъ a и b (рис. 52), центръ инерціи которыхъ предположимъ въ C, будемъ имѣть:

$$m_1 Ca + m_2 Cb = 0\,,$$

гдѣ сумма берется геометрически. Слѣдовательно діагональ параллелограмма, построеннаго, какъ на сторонахъ, на линіяхъ Ca и Cb, удлиненныхъ соотвѣтственно въ m_1 и m_2 разъ, долженъ быть равенъ нулю.

a b c

Рис. 52.

Это возможно только тогда, когда обѣ линіи составляютъ одну пря-

мую; тогда C лежитъ на прямой между a и b, и дѣлитъ ее въ обратномъ отношеніи къ прилегающимъ массамъ. Кромѣ того, разбивая систему точекъ на нѣсколько различныхъ группъ числомъ k, мы можемъ выраженіе

$$OC\Sigma m = \Sigma mr$$

написать въ такомъ видѣ:

$$OC\Sigma m = \Sigma_1 mr + \Sigma_2 mr + \ldots \Sigma_k mr,$$

гдѣ суммы Σ_1, $\Sigma_2, \ldots \Sigma_k$ берутся геометрически, по разстояніямъ массовыхъ единицъ каждой отдѣльной группы, и потомъ снова складываются геометрически. Затѣмъ очевидно, можно написать:

$$OC\Sigma m = \Sigma_1 m \frac{\Sigma_1 mr}{\Sigma_1 m} + \Sigma_2 m \frac{\Sigma_1 mr}{\Sigma_2 m} + \ldots \Sigma_k m \frac{\Sigma_k mr}{\Sigma_k m}, \qquad (25)$$

гдѣ $\Sigma m = \Sigma_1 m + \Sigma_2 m + \ldots \Sigma_k m$,

или, обозначая черезъ OC_1, $OC_2 \ldots OC_k$, по величинѣ и направленію, разстоянія центровъ инерціи каждой группы отъ O:

$$OC \,.\, \Sigma m = OC_1 \Sigma_1 m + OC_2 \Sigma_2 m + \ldots OC_k \Sigma_k m; \qquad (26)$$

откуда видно, что C есть центръ инерціи массъ $\Sigma_1 m$, $\Sigma_2 m, \ldots \Sigma_k m$, помѣщенныхъ соотвѣтственно въ точкахъ C_1, $C_2 \ldots C_k$.

Если даны прямоугольныя координаты x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, $z_2 \ldots x_n$, y_n, z_n матеріальныхъ точекъ, то координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ихъ центра инерціи найдутся слѣдующимъ образомъ. Разстояніе r_1 каждой точки отъ начала координатъ O разложимъ на три составляющія по осямъ координатъ, которыя будутъ очевидно: x_1, y_1, z_1. Затѣмъ очевидно, что алгебраическія суммы

$$\Sigma mx, \quad \Sigma my, \quad \Sigma mz$$

будутъ представлять три составляющія по осямъ координатъ геометрической суммы разстояній массовыхъ единицъ системы отъ начала координатъ. Но съ другой стороны, составляющія той-же суммы $\bar{r}\Sigma m$ (гдѣ $\bar{r}$ есть разстояніе ц. и. отъ начала коорд.) будутъ

$$\bar{x}\Sigma m, \quad \bar{y}\Sigma m, \quad \bar{z}\Sigma m,$$

ибо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ суть составляющія разстоянія $\bar{r}$. Слѣдовательно:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}. \qquad (27)$$

Эти послѣднія выраженія показываютъ, что разстоянія центра инерціи отъ плоскостей координатъ равняются среднимъ разстояніямъ отъ тѣхъ-же плоскостей массовыхъ единицъ системы. Такъ какъ плоскости координатъ могутъ быть выбраны произвольно, то слѣдовательно: разстояніе центра инерціи отъ любой плоскости равно среднему разстоянію отъ той-же плоскости массовыхъ единицъ системы.

§ 23. Моментъ силъ, скоростей, ускореній и т. п..

Выведенные въ предыдущихъ параграфахъ законы сохраненія количества движенія и неизмѣняемости движенія центра инерціи основаны на томъ свойствѣ взаимныхъ силъ, что эти послѣднія могутъ быть разбиты на такія составляющія, приложенныя къ различнымъ точкамъ системы, которыя попарно равны другъ другу и противоположны. Но кромѣ того, упомянутыя выше составляющія направлены попарно по одной и той-же прямой линіи (разстоянію между каждой парой матеріальныхъ точекъ). Это послѣднее свойство взаимныхъ силъ влечетъ за собою слѣдующее геометрическое условіе: разстояніе какой нибудь произвольно выбранной точки отъ линіи, представляющей одну изъ составляющихъ взаимныхъ силъ, будетъ также разстояніемъ той-же точки еще и отъ другой составляющей; т. е. составляющія взаимныхъ силъ попарно будутъ на одномъ и томъже разстояніи (по величинѣ и направленію) отъ произвольно выбранной точки. Такъ какъ съ другой стороны, тѣже составляющія равны и противоположны, то произведенія изъ составляющихъ и ихъ разстояній отъ произвольной точки будутъ тоже попарно равны и противоположны по знаку. Упомянутое произведеніе изъ силы и ея разстоянія отъ нѣкоторой точки называется моментомъ силы около данной точки. Въ случаѣ взаимныхъ силъ ихъ моменты слѣдовательно попарно равны и противоположны. Чтобы имѣть возможность вывести изъ этого обстоятельства дальнѣйшія свойства движенія системы, подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, разсмотримъ нѣкоторыя общія геометрическія свойства моментовъ.

Всякое количество, представляемое по величинѣ и направленію прямою линіею, будемъ называть векторомъ. Къ такимъ количествамъ относятся: перемѣщенія, скорость, ускореніе, количество дви-

женія, сила и т. п. Въ такомъ случаѣ **моментомъ** даннаго вектора будетъ вообще называться произведеніе изъ вектора и его разстоянія отъ нѣкоторой точки. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть моменты скорости, ускоренія, количества движенія, силы и т. п. Пусть AB будетъ данный векторъ (рис. 53), представляющій одно изъ выше перечисленныхъ количествъ, и OC—его разстояніе отъ точки O. Тогда моментъ этого вектора будетъ $\overline{OC}.\overline{AB}$, и представитъ очевидно удвоенную площадь треугольника OAB, построеннаго между концами вектора AB и точкою O. Перпендикуляръ, проведенный черезъ точку O къ плоскости треугольника OAB, называется осью даннаго момента. Положительное направленіе оси даннаго момента будетъ то, смотря вдоль по которому отъ точки O, наблюдатель видитъ векторъ $\overline{AB}$ направленнымъ по стрѣлкѣ часовъ. На приложенномъ рисункѣ ось момента будетъ очевидно направлена за плоскость рисунка, перпендикулярно къ этой послѣдней. Направленіе оси момента считается за направленіе момента. Величина момента откладывается вдоль по его оси. Такимъ образомъ линія, направленная выше объясненнымъ способомъ перпендикулярно къ плоскости момента, выражаетъ этотъ послѣдній по величинѣ и направленію.

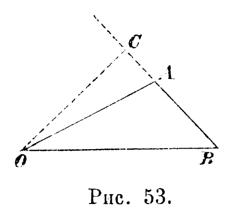


Рис. 53.

Такъ какъ моментъ представляется произведеніемъ изъ двухъ факторовъ, то очевидно, онъ можетъ сохранять одну и туже величину при соотвѣтственныхъ измѣненіяхъ обоихъ его факторовъ. Слѣдовательно, различные векторы, приложенные къ различнымъ точкамъ системы на различныхъ разстояніяхъ отъ данной оси, могутъ имѣть одинъ и тотъ же моментъ, представляемый одною и тою же линіею (векторомъ), отложенною вышеупомянутымъ способомъ вдоль по оси момента. Такъ напримѣръ, векторы f_1, f_2, f_3 и т. д., приложенные къ точкамъ, лежащимъ на одной и той же окружности, плоскость которой перпендикулярна къ данной оси $\overline{OM}$ (рис. 54), будутъ имѣть одинъ и тотъ-же моментъ около точки O. При этомъ, если величина векторовъ остается одна и

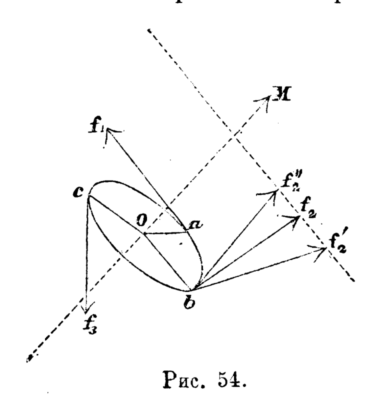


Рис. 54.

таже, то направленіе ихъ должно идти по касательной къ окружности; если величина векторовъ не остается одна и таже, то ихъ направленіе, отъ какой нибудь точки b на окружности должно быть выбрано такъ, чтобы концы векторовъ f_2', f_2'' и т. п., проведенныхъ изъ b, находились на прямой f_2' f_2 f_2'', проведенной черезъ конецъ f_2, параллельно линіи Ob *). Векторы, приложенные вышеописанными способами къ точкамъ окружностей одного и того же радіуса, описанныхъ около оси OM въ различныхъ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой послѣдней, будутъ имѣть одинъ и тотъ же моментъ около оси OM. Точно также будутъ обладать одинаковымъ моментомъ около оси OM векторы, приложенные вышеописанными способами по касательнымъ въ точкахъ окружностей разныхъ радіусовъ, описанныхъ около данной оси OM, въ различныхъ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой послѣдней, при чемъ длина векторовъ должна измѣняться обратно пропорціонально радіусамъ упомянутыхъ окружностей. И т. п.

Изъ предъидущаго очевидно также, что одинъ и тотъ-же моментъ, обусловливаемый различными векторами, обусловливаетъ вообще различныя перемѣщенія точекъ системы. Только въ частномъ случаѣ неизмѣняемой системы, какъ мы увидимъ далѣе, различные векторы одного и того же момента соотвѣтствуютъ однимъ и тѣмъ же перемѣщеніямъ системы.

Изъ предъидущаго мы видимъ, что всякіе векторы, отложенные какъ-либо отъ даннаго начала, могутъ представлять моменты около того же начала нѣкоторыхъ другихъ векторовъ, причемъ плоскости моментовъ будутъ перпендикулярны къ направленіямъ данныхъ векторовъ. При этомъ очевидно также, что геометрическая сумма данныхъ моментовъ, представленныхъ линіями, будетъ представлять тоже моментъ нѣкотораго вектора, лежащаго въ плоскости, перпендикулярной къ линіи, представляющей упомянутую сумму. Найдемъ соотношенія между векторами данныхъ моментовъ и векторами геометрической суммы этихъ послѣднихъ.

*) Тогда площади треугольниковъ obf_2, obf_2', obf_2'', пропорціональныя соотвѣтственнымъ моментамъ, будутъ очевидно равны между собою.

Пусть линіи Ob и Oc (рис. 55) представляютъ моменты около начала O двухъ векторовъ $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, не лежащихъ въ плоскости рисунка и приложенныхъ къ одной и той же точкѣ A. Тогда линіи Ob и Oc перпендикулярны къ площадямъ OAB и OAC, и по своей длинѣ равны ихъ удвоенной величинѣ, т. е. содержатъ столько единицъ длины, сколько упомянутыя двойныя площади—единицъ площадей. Кромѣ того, если AD будетъ геометрическая сумма $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, то удвоенная площадь OAD выразитъ моментъ этой суммы. Черезъ конецъ векторовъ B, C, D проведемъ прямыя параллельно линіи OA, и пересѣчемъ ихъ перпендикулярною къ нимъ плоскостію, проходящею черезъ точку A.

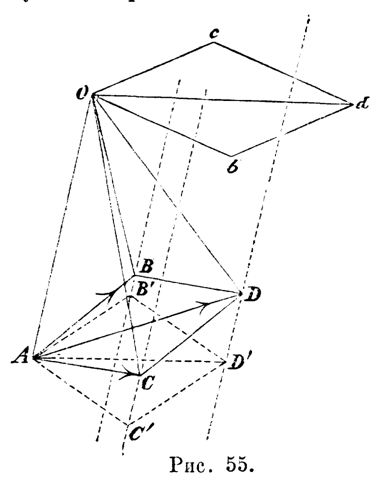


Рис. 55.

Тогда очевидно, моменты векторовъ $\overline{AB}$ и $\overline{AB'}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AC'}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AD'}$ около O будутъ попарно равны, ибо они выразятся соотвѣтственно равновеликими удвоенными площадями: OAB и OAB', OAC и OAC' и т. д. Кромѣ того, $\overline{AD'}$ будетъ, очевидно, геометрическою суммою отъ $\overline{AB'}$ и $\overline{AC'}$, т. е. діагональю параллелограмма, построеннаго на этихъ векторахъ. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть:

$$Ob = OA \,.\, \overline{AB'}\,, \qquad Oc = OA \,.\, \overline{AC'}\,.$$

Линія Od, представляющая геометрическую сумму $Ob + Oc$, будетъ, очевидно, перпендикулярна къ плоскости OAD'; а такъ какъ изъ подобія треугольниковъ Obd съ $AB'D'$ и Ocd съ $AC'D'$ слѣдуетъ, что

$$\frac{AD'}{Od} = \frac{AB'}{Ob} = \frac{AC'}{OC} = \frac{1}{OA}\,, \tag{28}$$

то

$$Od = OA \,.\, AD'\,,$$

т. е. представляетъ моментъ вектора AD' или, что все равно, вектора AD. Итакъ:

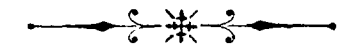
Геометрическая сумма моментовъ двухъ векторовъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, представляетъ, около всякаго начала, моментъ геометрической суммы данныхъ векторовъ. А слѣдовательно вообще, геометрическая сумма моментовъ какого угодно числа векторовъ, приложен-

ныхъ къ одной точкѣ, представляетъ моментъ геометрической суммы этихъ векторовъ.

Если начало O лежитъ въ плоскости данныхъ векторовъ, то сумма моментовъ обращается очевидно въ алгебраическую сумму площадей, и моменты откладываются по одному и тому же перпендикуляру.

Изъ предъидущаго очевидно также, что проложеніе момента, косоугольное или прямоугольное, на плоскость, проходящую черезъ начало, представитъ моментъ проложенія на туже плоскость даннаго вектора. Проложеніе момента на плоскость, не проходящую черезъ начало, представитъ моментъ проложенія даннаго вектора на туже плоскость, считаемый около оси, проходящей черезъ начало и перпендикулярной къ плоскости проложенія.

Такъ какъ одинъ и тотъ же моментъ можетъ быть обусловленъ различными векторами, то вообще нѣсколько моментовъ, отложенныхъ отъ одного начала, не всегда соотвѣтствуютъ векторамъ, приложеннымъ къ одной и той же точкѣ, хотя такіе векторы для данныхъ моментовъ и могутъ быть подъисканы. Слѣдовательно, моментъ геометрической суммы векторовъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, всегда будетъ геометрическою суммою моментовъ данныхъ векторовъ, но не наоборотъ.



Разсмотримъ теперь значеніе геометрической суммы моментовъ для того случая, когда соотвѣтствующіе векторы приложены къ различнымъ точкамъ.

Прежде всего найдемъ по данному моменту, около одного начала, выраженіе момента около другаго начала. Пусть двойная площадь треугольника OAB (рис. 56) представляетъ моментъ вектора $\overline{AB}$ около O, а двойная площадь $O'AB$—моментъ того же вектора около O', и пусть вообще оба треугольника лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ. Черезъ O' проведемъ плоскость, перпендикулярную къ AB, а черезъ O прямую, параллельную AB; точку C пересѣченія этой линіи съ упомянутой плоскостію соединимъ съ O' и съ D (точкой пересѣченія плоскости и AB). Тогда очевидно, $O'D$ и CD будутъ перпендикулярны

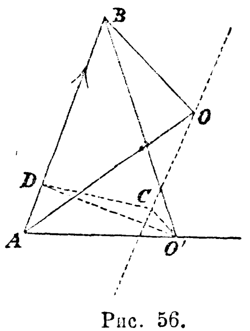


Рис. 56.

къ AB, а $O'C$—къ OC. Такъ какъ $O'D$ является геометрическою суммою $O'C$ и CD, то мы можемъ писать:

$$\overline{AB}\,.\,\overline{O'D} = \overline{AB}\,(\overline{O'C} + \overline{CD})\,, \tag{29}$$

гдѣ сумма берется геометрически. Но $\overline{AB}\,.\,\overline{O'C}$ представляетъ моментъ, относительно начала O', вектора $\overline{AB}$, перенесеннаго параллельно самому себѣ въ точку O; а $\overline{AB}\,.\,\overline{CD}$ равно моменту вектора AB около начала O. Легко видѣть также, что правая часть выраженія (29) представляетъ геометрическую сумму упомянутыхъ моментовъ. Слѣдовательно, моментъ даннаго вектора, около новаго начала, равенъ геометрической суммѣ изъ момента того же вектора, около стараго начала, и момента, около новаго начала, даннаго вектора, перенесеннаго параллельно самому себѣ въ старое начало.

Обозначимъ черезъ M' геометрическую сумму моментовъ, около нѣкотораго начала, для векторовъ, приложенныхъ различными образами, къ различнымъ точкамъ,—черезъ M—геометрическую сумму тѣхъ же векторовъ, около новаго начала, а черезъ $\mathfrak{M}$—моментъ векторовъ, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ старое начало, и взятый около новаго начала. Тогда по предъидущему

$$M = M' + \mathfrak{M}\,, \tag{30}$$

гдѣ сумма берется геометрически.

Изъ этого послѣдняго выраженія мы видимъ, что геометрическая сумма моментовъ векторовъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, представляетъ моментъ геометрической суммы всѣхъ векторовъ, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ нѣкоторую точку, сложенный геометрически съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ моментомъ, независящимъ отъ положенія новаго начала.

Изъ (30) легко видѣть, что моментъ около начала O векторовъ, приложенныхъ къ точкѣ O', равенъ и противоположенъ моменту около начала O' тѣхъ-же векторовъ, перенесенныхъ въ точку O. Дѣйствительно, опредѣляя моментъ M' какихъ нибудь векторовъ около O', по ихъ мо-

менту M около O, мы имѣемъ:

$$M' = M + \mathfrak{M}_0 ,$$

гдѣ $\mathfrak{M}_0$ есть моментъ всѣхъ векторовъ, перенесенныхъ въ точку O. Но по (30):

$$M' = M \sim \mathfrak{M} .$$

Слѣдовательно:

$$-\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 .$$

Точку, куда переносятся всѣ векторы, мы можемъ выбирать совершенно произвольно; съ перемѣной положенія этой точки будетъ очевидно мѣняться и величина добавочнаго момента. Мы можемъ выбрать упомянутую точку такъ, чтобы величина добавочнаго момента M' была наименьшею или, если возможно, равнялась бы нулю. Въ этомъ послѣднемъ простѣйшемъ случаѣ, съ котораго мы начнемъ, геометрическая сумма моментовъ можетъ быть очевидно равна моменту геометрической суммы векторовъ, перенесенныхъ въ одну точку.

Приложимъ предъидущее разсужденіе къ частному случаю двухъ параллельныхъ векторовъ. Сумма моментовъ двухъ такихъ векторовъ очевидно тогда равна нулю, когда эти моменты равны другъ другу и противуположны; а такъ какъ моментъ представляется линіей, перпендикулярной къ плоскости, проходящей черезъ начало и векторъ, то очевидно, что точка нулеваго момента должна лежать въ одной плоскости съ обоими векторами. Если параллельные векторы направлены въ одну сторону, то моменты ихъ будутъ противоположны около начала, расположеннаго между векторами; слѣдовательно между векторами должно находиться начало нулеваго момента. Обозначая черезъ A и B величины упомянутыхъ векторовъ, а черезъ a и b— ихъ разстоянія отъ начала нулеваго момента, мы будемъ имѣть условіе:

$$A \cdot a = B \cdot b , \tag{31}$$

откуда видимъ, что геометрическая сумма моментовъ, около всякаго начала, отъ двухъ параллельныхъ векторовъ, направленныхъ въ одну сторону, равна моменту вектора, равнаго ариѳметической суммѣ данныхъ векторовъ, приложеннаго къ точкѣ, находящейся въ плоскости обоихъ векторовъ, между ними и на разстояніяхъ отъ нихъ, обратно пропорціональныхъ величинамъ данныхъ векторовъ. Такой векторъ,

въ отношеніи къ моменту, можетъ быть названъ результирующимъ векторомъ. Этотъ послѣдній остается одинъ и тотъ же для данныхъ векторовъ, около какого начала ни былъ бы взятъ моментъ.

Точно такими же разсужденіями найдемъ, что результирующій векторъ двухъ параллельныхъ векторовъ, направленныхъ въ разныя стороны, равенъ ихъ ариѳметической разности, лежитъ въ ихъ плоскости, по одной сторонѣ отъ обоихъ составляющихъ, ближе къ бóльшему вектору, на разстояніяхъ отъ обоихъ векторовъ, обратно пропорціональныхъ ихъ величинамъ.

Сравнивая этотъ результатъ съ выводами § 13, мы заключаемъ, что результирующій векторъ параллельныхъ векторовъ находится, какъ результирующая ось вращенія для параллельныхъ осей.

Изъ предъидущаго очевидно, что два равные и противоположные вектора, приложенные къ различнымъ точкамъ, не имѣютъ себѣ результирующаго вектора; т. е. нельзя найти такой векторъ, моментъ котораго около произвольнаго начала былъ бы равенъ геометрической суммѣ моментовъ около того же начала отъ двухъ упомянутыхъ равныхъ и противоположныхъ векторовъ. Такіе два вектора носятъ названіе пары.

Такъ какъ моментъ векторовъ, около новаго начала, равенъ моменту около прежняго начала, сложенному съ моментомъ около новаго начала тѣхъ же векторовъ, перенесенныхъ безъ измѣненія ихъ величины и направленія въ старое начало, то очевидно, что моментъ пары остается одинъ и тотъ же по величинѣ и направленію около всякаго начала (ибо въ выраженіи (30) всегда $\mathfrak{M} = O$).

Такъ какъ моментъ пары, равный геометрической суммѣ моментовъ обоихъ ея векторовъ, остается одинъ и тотъ же для всякаго начала, то, выбирая начало въ точкѣ приложенія одного изъ векторовъ пары, находимъ, что этотъ моментъ выражается произведеніемъ изъ разстоянія между векторами пары и одного изъ двухъ равныхъ векторовъ; кромѣ того очевидно, этотъ моментъ перпендикуляренъ къ плоскости пары, и направленъ въ ту сторону отъ наблюдателя, смотря въ которую онъ видитъ векторы идущими по стрѣлкѣ часовъ.

Моментъ пары около даннаго начала можетъ быть замѣненъ моментомъ какого либо одного вектора, лежащаго въ плоскости, параллельной плоскости пары; но такой векторъ не останется одинъ и тотъ же для различныхъ началъ. Наоборотъ очевидно, моментъ

даннаго вектора около нѣкотораго начала можетъ быть замѣненъ моментомъ пары; но эта пара не будетъ одна и таже для разныхъ началъ.

Геометрическая сумма моментовъ нѣсколькихъ паръ, около всякаго начала, будетъ одна и таже по величинѣ и направленію, ибо каждое изъ слагающихъ этой суммы будетъ одно и тоже. Слѣдовательно, геометрическая сумма моментовъ паръ представляетъ тоже моментъ нѣкоторой пары.

Моментъ пары около даннаго начала не измѣнится ни по величинѣ, ни по направленію, если точки приложенія векторовъ будутъ перенесены куда либо въ плоскости пары или въ плоскости ей параллельной, и притомъ такъ, чтобы, съ измѣненіемъ разстоянія между векторами и величины этихъ послѣднихъ, произведеніе изъ разстоянія и величины вектора оставалось одно и тоже.

Очевидно также, что одну пару можно разлагать на нѣсколько паръ, лежащихъ въ разныхъ не параллельныхъ плоскостяхъ; при этомъ необходимо только, чтобы геометрическая сумма моментовъ, слагающихъ паръ была равна моменту данной пары.

Вообще разложеніе и сложеніе паръ можетъ быть произведено или съ помощію разложенія и сложенія ихъ моментовъ, или съ помощію разложенія и сложенія ихъ векторовъ. То и другое приводитъ очевидно къ одинаковому результату.

Теперь мы можемъ перейти къ непосредственному рѣшенію поставленной въ началѣ общей задачи о значеніи геометрической суммы моментовъ (около даннаго начала) отъ векторовъ, приложенныхъ различными способами къ различнымъ точкамъ. Выберемъ нѣкоторую произвольную точку, и приложимъ къ ней векторы, соотвѣтственно равные и параллельные даннымъ. Образованную такимъ образомъ около упомянутой точки систему векторовъ назовемъ черезъ A. Къ той же точкѣ приложимъ другую систему векторовъ B, каждый векторъ которой равенъ и противоположенъ соотвѣтствующему вектору системы A. Геометрическая сумма векторовъ системъ A и B и ихъ моментъ около всякаго начала будутъ очевидно равны нулю. Слѣдовательно, моментъ данныхъ векторовъ не измѣнится, если къ нему мы приложимъ моментъ системы $A+B$. Но всѣ данные векторы вмѣстѣ съ векторами B образуютъ очевидно систему паръ, которая, по отношенію къ моменту, можетъ быть замѣнена одною парою; векторы же системы A могутъ быть замѣнены однимъ векторомъ,

который и обозначимъ чрезъ A. Такимъ образомъ всѣ векторы будутъ замѣнены одною парою и векторомъ. Полученную пару разложимъ на двѣ: одну P—въ плоскости, перпендикулярной къ упомянутому вектору, а другую Q—въ одной плоскости съ этимъ послѣднимъ. Пара и векторъ, лежащіе въ одной плоскости, могутъ быть замѣнены однимъ векторомъ въ той же плоскости. Такъ какъ пару можно вращать въ ея плоскости, не измѣняя этимъ ея момента, то ставя векторы пары Q параллельно вектору A, получимъ въ результатѣ одинъ векторъ, перпендикулярный къ плоскости пары P.

Итакъ, всякая система векторовъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, можетъ быть замѣнена, по отношенію къ моменту, нѣкоторою парою и векторомъ, перпендикулярнымъ къ плоскости этой послѣдней. Моментъ пары будетъ представлять неизмѣнную часть $\mathfrak{M}$ выраженія (30), а моментъ вектора—часть M'.

Кромѣ того, если найдены какая нибудь пара и векторъ A, замѣняющіе собою данную систему векторовъ, то одинъ изъ векторовъ пары можетъ быть очевидно приложенъ въ той же точкѣ, какъ векторъ A. Оба эти послѣдніе векторы могутъ быть замѣнены однимъ, равнымъ ихъ геометрической суммѣ, и такимъ образомъ наша данная система замѣнится двумя векторами, приложенными къ двумъ различнымъ точкамъ и лежащими въ разныхъ плоскостяхъ. Такихъ векторовъ, взятыхъ по два и замѣняющихъ данную систему, можно очевидно подъискать безчисленное множество. Такъ какъ величина и направленіе обоихъ векторовъ пары могутъ быть выбраны произвольно (лишь бы ихъ моментъ оставался одинъ и тотъ же), то векторы найденной пары мы можемъ въ ихъ плоскости поставить такъ, чтобы черезъ одинъ изъ этихъ векторовъ и векторъ A проходила плоскость, перпендикулярная къ плоскости пары; затѣмъ величину векторовъ пары выберемъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ, слагаясь геометрически съ A, далъ бы результирующій векторъ, перпендикулярный къ плоскости пары. Такимъ образомъ замѣнимъ данную систему векторовъ, т. е. всякую пару и векторъ, двумя взаимно перпендикулярными векторами, лежащими въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ и приложенными къ разнымъ точкамъ. Такихъ парныхъ векторовъ мы можемъ подъискать тоже безчисленное множество, ибо данная система можетъ

быть замѣнена безчисленнымъ множествомъ системъ, состоящихъ изъ пары и вектора.

Наконецъ, если можно найти два вектора, замѣняющіе данную систему, то очевидно всегда можно найти и всякое бо́льшее число такихъ векторовъ, тоже приложенныхъ къ различнымъ точкамъ.

Вышеописанная замѣна, съ помощію двухъ взаимно перпендикулярныхъ векторовъ, очевидно не можетъ быть произведена, если система векторовъ представляется только одною парою, или однимъ векторомъ. Кромѣ того, замѣна не удастся, если мы за одну изъ упомянутыхъ выше взаимно перпендикулярныхъ плоскостей выберемъ плоскость пары, къ которой векторъ перпендикуляренъ.



Выразимъ моментъ векторовъ, около даннаго начала, съ помощію составляющихъ векторовъ, по прямоугольнымъ осямъ, и координатъ точекъ ихъ приложенія.

Положимъ, что начало координатъ выбрано въ точкѣ, около которой берется моментъ. Пусть X, Y, Z будутъ составляющія нѣкотораго вектора по осямъ координатъ, а x, y, z—координаты его точки приложенія. Моментъ векторовъ X, Y, Z (т. е. геометрическую сумму ихъ моментовъ) около начала координатъ представимъ себѣ разложеннымъ на три момента, параллельно осямъ координатъ. Слагающій моментъ по оси x—овъ можетъ быть обусловленъ очевидно только векторами, расположенными въ плоскости перпендикулярной къ оси x—овъ, т. е. векторами Y и Z. Та часть момента этихъ двухъ векторовъ, которая направлена по оси x—овъ, представится произведеніями изъ векторовъ и ихъ разстояній отъ оси момента, т. е. оси x—овъ; эти разстоянія для Y и Z суть соотвѣтственно z и y. Кромѣ того очевидно, что моментъ Yz будетъ идти около оси x—овъ по стрѣлкѣ часовъ, а моментъ Zy—обратно; слѣдовательно, первый будетъ положительный и второй—отрицательный, по отношенію къ положительному направленію оси x—овъ. Алгебраическая сумма обоихъ моментовъ представитъ весь моментъ, направленный по оси x—овъ, т. е.

$$Yz - Zy\,.$$

Точно также для осей y—овъ и z—овъ получимъ соотвѣтственно:

$$Zx - Xz \quad \text{и} \quad Xy - Yx\,.$$

Если, вмѣсто одного вектора (X, Y, Z), имѣемъ ихъ нѣсколько, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, то составляющія по осямъ координатъ геометрической суммы моментовъ такихъ векторовъ, будутъ очевидно равны соотвѣтственно суммамъ составляющихъ по тѣмъ же осямъ моментовъ отдѣльныхъ векторовъ. Такимъ образомъ, обозначая черезъ L_0, M_0, N_0 составляющія части по осямъ координатъ момента всѣхъ данныхъ векторовъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} L_0 &= \sum (Yz - Zy), \\ M_0 &= \sum (Zx - Xz), \\ N_0 &= \sum (Xy - Yx), \end{aligned} \tag{32}$$

гдѣ суммованіе производится по различнымъ векторамъ и соотвѣтственнымъ координатамъ ихъ точекъ приложенія.

Если ищется моментъ не около начала координатъ, а около нѣкоторой точки, координаты которой суть x_0, y_0, z_0, то перенося начало координатъ въ упомянутую точку, мы получимъ новыя выраженія для составляющихъ L, M, N, если въ выраженіяхъ (32) координаты x, y, z, относительно прежняго начала, замѣнимъ координатами $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, относящимися къ новому началу. Тогда получимъ для новыхъ L, M и N выраженія.

$$\begin{aligned} L &= \sum [Y(z - z_0) - Z(y - y_0)], \\ M &= \sum [Z(x - x_0) - X(z - z_0)], \\ N &= \sum [X(y - y_0) - Y(x - x_0)]. \end{aligned} \tag{33}$$

Обозначая

$$A = \sum X, \qquad B = \sum Y, \qquad C = \sum Z, \tag{34}$$

мы можемъ выраженія (33) писать въ видѣ:

$$\begin{aligned} L &= L_0 - (Bz_0 - Cy_0), \\ M &= M_0 - (Cx_0 - Az_0), \\ N &= N_0 - (Ay_0 - Bx_0), \end{aligned} \tag{35}$$

гдѣ члены въ скобкахъ представляютъ слагающія моментовъ, около начала координатъ, отъ векторовъ, перенесенныхъ параллельно самимъ

себѣ въ точку (x_0, y_0, z_0). Тѣже скобки, но съ обратнымъ знакомъ, выразятъ моменты около точки (x_0, y_0, z_0) отъ векторовъ, перенесенныхъ въ начало координатъ. Такимъ образомъ въ равенствахъ (35) выражается свойство моментовъ, представленное выраженіемъ (31).

Если величины L, M, N слагающихъ момента P извѣстны, то величина самаго момента опредѣлится выраженіемъ:

$$P^2 = L^2 + M^2 + N^2 , \tag{36}$$

а его углы съ осями координатъ—косинусами:

$$\frac{L}{P}, \quad \frac{M}{P}, \quad \frac{N}{P} . \tag{37}$$

Векторы, обусловливающіе моментъ P, могутъ быть замѣнены одною парою и векторомъ, перпендикулярнымъ къ ея плоскости. Найдемъ моментъ упомянутой пары Π и упомянутый векторъ Γ.

Пусть λ, μ, ν будутъ слагающія момента Π, составляющаго нѣкоторую часть отъ момента P, направленную параллельно результирующему вектору R слагающихъ A, B, C. Тогда очевидно

$$\frac{\lambda}{\Pi} = \frac{A}{R}, \quad \frac{\mu}{\Pi} = \frac{B}{R}, \quad \frac{\nu}{\Pi} = \frac{C}{R},$$

откуда

$$\lambda = \nu \frac{A}{C}, \quad \mu = \nu \frac{B}{C} . \tag{38}$$

Слагающія другой части P, т. е. геометрической разности $P \sim \Pi$ будутъ очевидно

$$L - \lambda, \quad M - \mu, \quad N - \nu,$$

и такъ какъ оба момента Π и $P \sim \Pi$ должны быть перпендикулярны другъ къ другу, то

$$(L - \lambda)\lambda + (M - \mu)\mu + (N - \nu)\nu = 0 ,$$

откуда на основаніи (38):

$$\left(L - \nu\frac{A}{C}\right)\frac{A}{C} + \left(M - \nu\frac{B}{C}\right)\frac{B}{C} + (N - \nu) = 0$$

и

$$\begin{aligned} \lambda &= A\,\frac{AL + BM + CN}{R^2}, \\ \mu &= B\,\frac{AL + BM + CN}{R^2}, \\ \nu &= C\,\frac{AL + BM + CN}{R^2}, \end{aligned} \tag{39}$$

или, на основаніи (35):

$$\lambda = \frac{A}{R^2}(AL_0 + BM_0 + CN_0),$$

$$\mu = \frac{B}{R^2}(AL_0 + BM_0 + CN_0), \qquad (40)$$

$$\nu = \frac{C}{R^2}(AL_0 + BM_0 + CN_0),$$

откуда видимъ, что λ, μ, ν должны быть составляющими момента нѣкоторой пары, такъ какъ они не зависятъ отъ положенія начала момента, т. е. координатъ точки (x_0, y_0, z_0).

Слагающія остальной части момента P будутъ, на основаніи (35) и (40):

$$L - \lambda = B\left(\frac{L_0B - M_0A}{R^2} - z_0\right) - C\left(\frac{N_0A - L_0C}{R^2} - y_0\right),$$

$$M - \mu = C\left(\frac{M_0C - N_0B}{R^2} - x_0\right) - A\left(\frac{L_0B - M_0A}{R^2} - z_0\right), \qquad (41)$$

$$N - \nu = A\left(\frac{N_0A - L_0C}{R^2} - y_0\right) - B\left(\frac{M_0C - N_0B}{R^2} - x_0\right).$$

Выраженія (41) представляютъ слагающія момента около точки (x_0, y_0, z_0) вектора R, проходящаго черезъ точку, координаты ξ, η, ζ которой суть:

$$\xi = \frac{M_0C - N_0B}{R^2}, \quad \eta = \frac{N_0A - L_0C}{R^2}, \quad \zeta = \frac{L_0B - M_0A}{R^2}. \qquad (42)$$

Слѣдовательно вообще можемъ представить:

$$L = \lambda + B(\zeta - z_0) - C(\eta - y_0),$$

$$M = \mu + C(\xi - x_0) - A(\zeta - z_0), \qquad (43)$$

$$N = \nu + A(\eta - y_0) - B(\xi - x_0),$$

откуда видимъ, что моментъ данныхъ векторовъ выражается моментомъ геометрической суммы R этихъ векторовъ, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ нѣкоторую точку (ξ, η, ζ), и моментомъ пары, плоскость которой перпендикулярна къ R.

§ 24. Сохраненіе момента количества движенія или сохраненіе площадей.

Если равнодѣйствующія силы, приложенныя къ свободнымъ матеріальнымъ точкамъ данной системы, обусловливаются взаимными силами, дѣйствующими между упомянутыми точками, то такія равнодѣйствующія мы можемъ замѣнить составляющими, которыя для различныхъ точекъ приложенія попарно равны и направлены противоположно соотвѣтственно по однѣмъ и тѣмъ же прямымъ. Моментъ каждыхъ двухъ изъ такихъ составляющихъ будетъ равенъ нулю около всякаго начала; а слѣдовательно равна нулю и сумма всѣхъ подобныхъ моментовъ, или по предъидущему параграфу, равенъ нулю моментъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ данной системы.

Обозначимъ черезъ f_1, $f_2 \ldots f_n$ упомянутыя равнодѣйствующія всѣхъ взаимныхъ силъ, приложенныя къ различнымъ n точкамъ системы, а черезъ ∂_1, $\partial_2 \ldots \partial_n$ — длины перпендикуляровъ на направленія этихъ силъ изъ какого нибудь начала. Тогда, на основаніи предъидущаго:

$$f_1\ \partial_2 + f_2\ \partial_2 + \cdots\cdot f_n\ \partial_n = 0, \tag{44}$$

или вообще

$$\sum f.\partial = 0,$$

гдѣ сумма берется геометрически, т. е. каждое изъ произведеній $f\partial$ выражается опредѣленною прямою линіею, и затѣмъ всѣ такія линіи слагаются геометрически.

Разыщемъ теперь кинематическое значеніе предъидущихъ выраженій. Обозначая черезъ m_1, $m_2 \ldots m_n$ и g_1, $g_2 \ldots g_n$ соотвѣтственно массы и ускоренія точекъ системы, мы можемъ написать выраженіе (44) въ видѣ:

$$m_1 g_1 \partial_1 + m_2 g_2 \partial_2 + \cdots\cdot m_n g_n \partial_n = 0$$

или (45)

$$\sum mg.\partial = 0 \ ^{*)}.$$

Обозначая черезъ dt элементъ времени и умножая на него предъидущее выраженіе, имѣемъ:

$$m_1 g_1 dt.\partial + m_2 g_2 dt.\partial + \cdots m_n g_n dt.\partial = 0,$$

*) Должно помнить, что равенство $f = mg$ тогда имѣетъ мѣсто, когда никакая часть силы f не уравновѣшена другою силою или сопротивленіемъ. Поэтому уравненіе (45) имѣетъ силу только для свободной системы.

или помня, что вообще

$$gdt = \Delta v \,,$$

гдѣ Δv есть геометрическое приращеніе скорости къ концу элемента времени dt, имѣемъ:

$$\sum m\Delta v . \partial = 0 \,, \tag{46}$$

гдѣ каждое ∂ перпендикулярно къ соотвѣтствующему Δv, ибо направленія g и Δv одинаковы. Слѣдовательно, геометрическая сумма моментовъ приращеній количества движенія для каждаго момента времени равна нулю.

Изъ предъидущаго параграфа мы знаемъ, что геометрическая сумма или разность моментовъ данныхъ векторовъ можетъ быть представлена какъ моментъ геометрической суммы или разности векторовъ. Отсюда заключаемъ, что приращеніе момента, обусловливаемое приращеніемъ вектора, равно моменту приращенія вектора. Слѣдовательно наоборотъ, когда разсматриваемый векторъ представляетъ собою количество движенія, то моментъ приращенія количества движенія равенъ приращенію момента количества движенія. Но на основаніи (46), обозначая геометрическое приращеніе момента количества движенія черезъ $\Delta\Sigma mv.\delta$, мы имѣемъ

$$\Delta \sum mv.\delta = \sum \Delta (mv).\partial = 0 \,, \tag{47}$$

гдѣ соотвѣтственныя δ и ∂ различны по величинѣ и направленію, ибо ∂ перпендикулярно къ Δv, а δ—къ v; направленія же Δv и v вообще различны.

Если приращеніе какого нибудь количества между всякими двумя произвольно выбранными и безконечно близкими моментами времени (началомъ и концомъ времени dt) равно нулю, то само количество очевидно всегда остается одно и тоже. Вслѣдствіе этого заключаемъ, что моментъ количества движенія системы, около даннаго начала, остается одинъ и тотъ-же во все время движенія системы, если это движеніе совершается подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ системы. Это свойство моментовъ количества движенія извѣстно подъ именемъ закона сохраненія момента движенія. Моменты движенія, взятые около различныхъ началъ, оставаясь одними и тѣми же для различныхъ временъ, будутъ очевидно вообще между собою различны.

Обращая вниманіе на то, что произведеніе vdt выражаетъ длину пути, проходимаго движущеюся точкою въ теченіи элемента времени dt, мы легко можемъ видѣть, что $vdt.\delta$ представитъ удвоенную площадь треугольника, образованнаго линіями, проведенными изъ начала момента къ концамъ элемента пути vdt, и самимъ элементомъ; или иначе, $vdt.\delta$ представляетъ двойную площадь, описанную въ элементъ времени радіусомъ векторомъ движущейся точки около начала момента. Складывая подобныя площади, описанныя радіусами векторами всѣхъ массовыхъ единицъ, связанныхъ съ данною движущеюся точкою, мы получимъ очевидно $mvdt.\delta$, если m есть масса движущейся точки. Складывая наконецъ геометрически элементарныя площади, описанныя около даннаго начала радіусами векторами всѣхъ массовыхъ единицъ системы, мы получаемъ $dt\Sigma mv.\delta$, при чемъ геометрическая сумма берется описаннымъ уже способомъ, какъ геометрическая сумма моментовъ. На основаніи закона сохраненія момента движенія заключаемъ далѣе, что, для каждаго изъ равныхъ и произвольно выбранныхъ элементовъ времени dt, геометрическая сумма вышеупомянутыхъ элементарныхъ площадей, т. е. $dt\Sigma mv.\delta$, остается одна и таже. Но каждые два равные промежутка времени, произвольной конечной величины, могутъ быть разбиты на безконечное число равныхъ элементовъ времени, и каждая геометрическая сумма конечныхъ площадей можетъ быть разбита на безконечно большое число элементарныхъ. Если-же элементарныя части двухъ конечныхъ величинъ равны, то очевидно будутъ равны между собою и самыя эти величины, какъ двѣ суммы, состоящія изъ равнаго числа равныхъ слагаемыхъ. На основаніи такихъ соображеній заключаемъ, что геометреческая сумма площадей, описываемыхъ около даннаго начала радіусами векторами всѣхъ массовыхъ единицъ системы въ теченіи равныхъ и произвольныхъ промежутковъ времени, остается одна и таже. Высказанная теорема носитъ названіе закона сохраненія площадей.

На основаніи (31), моментъ количества движенія около всякаго начала можетъ быть представленъ какъ сумма изъ момента нѣкоторой пары количества движенія и момента всего количества движенія, приложеннаго къ одной точкѣ. Но количество движенія системы, приложенное къ одной точкѣ, т. е. геометрическая сумма Σmv, равно нулю, когда

центръ инерціи системы непожвиженъ. Слѣдовательно, **моментъ движенія системы, и геометрическая сумма площадей, описываемыхъ въ равныя времена радіусами векторами массовыхъ единицъ системы, остаются одни и тѣже для всякаго начала, если центръ инерціи системы неподвиженъ.** Если-же центръ инерціи движется, то моменты движенія системы около различныхъ точекъ разнятся между собою по стольку, по скольку разнятся моменты около тѣхъ-же точекъ количества движенія центра инерціи, съ которымъ связана вся масса системы. Слѣдовательно моментъ движенія системы около какой либо неподвижной точки равенъ суммѣ изъ момента движенія системы около движущагося центра инерціи и момента движенія самого центра инерціи около упомянутой точки. Оба эти момента, независимо другъ отъ друга, не измѣняются со временемъ.

Если моментъ движенія системы остается постояннымъ, то и проложеніе его на какую нибудь неподвижную линію или плоскость тоже постоянно, или, что все равно, постоянна алгебраическая сумма проложеній составляющихъ момента (т. е. моментовъ движенія каждой точки системы) на какую нибудь линію или плоскость. Слѣдовательно, алгебраическая сумма проложеній площадей, относящихся къ каждой матеріальной точкѣ, на какую нибудь плоскость остается постоянною, если геометрическая сумма упомянутыхъ площадей постоянна.

Обозначая черезъ m массы точекъ системы, черезъ x, y, z— соотвѣтствующія координаты и черезъ u, v, w—слагающія скорости по осямъ координатъ, мы легко увидимъ, что алгебраическія суммы

$$\sum m(vz - wy)\,, \quad \sum m(wx - uz)\,, \quad \sum m(uy - vx)\,, \qquad (48)$$

представляютъ съ одной стороны проложенія момента около начала координатъ (т. е. его составляющія) на оси координатъ, а съ другой—суммы проложеній на плоскости координатъ удвоенныхъ площадей, описываемыхъ соотвѣтствующими радіусами векторами около начала въ теченіи элемента времени dt, дѣленныя на dt. На основаніи вышесказаннаго, три упомянутыя выраженія должны оставаться неизмѣнными со временемъ.

Систему свободныхъ матеріальныхъ точекъ, движущихся подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ и сохраняющую въ силу этого постояннымъ

свое количество движенія Σmv и свой моментъ движенія $\Sigma mv\delta$, мы будемъ для краткости обозначать названіемъ свободной консервативной системы.

§ 25. Дѣйствіе внѣшнихъ силъ на свободную консервативную систему.

Такъ какъ скорость центра инерціи системы и моментъ ея количества движенія не измѣняются отъ взаимодѣйствія частей системы другъ на друга, то измѣненіе упомянутыхъ количествъ должно обусловливаться причинами, лежащими внѣ данной системы, т. е. внѣшними силами. Итакъ, результатомъ дѣйствія внѣшнихъ силъ на данную систему матеріальныхъ точекъ будетъ измѣненіе скорости центра инерціи системы и момента ея движенія. Но очевидно, что упомянутыми дѣйствіями внѣшнія силы еще не опредѣляются вполнѣ; точно также данныя внѣшнія силы производятъ не одни только упомянутыя измѣненія.

Обозначимъ черезъ $f_1, f_2 \ldots f_n$ результирующія внутреннихъ (взаимныхъ) силъ, дѣйствующихъ на каждую изъ n свободныхъ матеріальныхъ точекъ данной системы, черезъ F_1, $F_2 \ldots F_n$ — внѣшнія силы, приложенныя къ нѣкоторымъ или ко всѣмъ точкамъ той-же системы, черезъ m_1, $m_2 \ldots m_n$—массы точекъ системы и черезъ $g_1, g_2 \ldots g_n$— ихъ ускоренія. Тогда, на основаніи втораго закона движенія, имѣемъ:

$$m_1 g_1 = f_1 + F_1, \quad \ldots\ldots m_n g_n = f_n + F_n, \tag{49}$$

гдѣ суммы $f_1 + F_1$ и т. д. вообще берутся геометрически. Складывая урр. (49) геометрически другъ съ другомъ, и замѣчая, что, на основаніи третьяго закона движенія, $\Sigma f = 0$, мы получимъ:

$$\Sigma mg = \Sigma F$$

или (50)

$$\sum m \frac{\Delta v}{dt} = \sum F,$$

гдѣ v обозначаетъ соотвѣтственно скорость каждой изъ точекъ системы, а dt есть нѣкоторый элементъ времени. Лѣвая часть предъидущаго выраженія представляетъ геометрическую сумму приращеній въ единицу времени количествъ движенія точекъ системы, т. е. иными слова-

ми—приращеніе геометрической суммы тѣхъ-же количествъ движенія. Обозначая это послѣднее приращеніе черезъ $\Delta\Sigma mv$, мы можемъ представить (50) въ видѣ:

$$\frac{\Delta\Sigma mv}{dt} = \Sigma F. \tag{51}$$

Но если мы черезъ V обозначимъ скорость центра инерціи системы, а черезъ M—сумму всѣхъ ея массъ, то, на основаніи (23), будемъ имѣть:

$$\Sigma mv = MV \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\Sigma mv}{dt} = MG, \tag{52}$$

гдѣ G есть ускореніе центра инерціи. Поэтому

$$MG = \Sigma F, \tag{53}$$

откуда видимъ, что ускореніе центра инерціи вполнѣ опредѣляется геометрическою суммою внѣшнихъ силъ и слѣдовательно не зависитъ, при одной и той-же величинѣ этой суммы, ни отъ величины или направленія каждой силы въ отдѣльности, ни отъ ея точки приложенія. Итакъ мы заключаемъ, что внѣшнія силы измѣняютъ движеніе центра инерціи такимъ образомъ, какъ будто онѣ всѣ, безъ измѣненія своего направленія, были къ нему приложены, причемъ вся масса системы была-бы связана съ ея центромъ инерціи.

Пусть напримѣръ нѣкоторая мгновенная сила подѣйствуетъ на покоющуюся матеріальную точку A, связанную съ массою m_1. Результатомъ этого дѣйствія будетъ то, что черезъ единицу времени точка A перейдетъ (рис. 57) въ A' по направленію сообщенной скорости, которая представится линіею AA'; импульсъ силы будетъ измѣряться произведеніемъ $m \cdot AA'$. Но если мы вообразимъ себѣ нѣкоторую другую неподвижную точку B, съ массою m_2, и независимую отъ точки A, то мы можемъ все-таки разсматривать обѣ точки A и B, какъ нѣкоторую систему, въ которой взаимныя силы, каждая въ отдѣльности, равны нулю. Центръ инерціи этой системы будетъ до перемѣщенія въ точкѣ C, выбранной такъ на AB, что $AC : CB = m_2 : m_1$; по истеченіи единицы времени онъ будетъ въ C', причемъ $A'C' : C'B = m_2 : m_1$; отсюда слѣдуетъ, что $AA' : CC' = (m_1 + m_2) : m_1$. Туже самую величину для CC' мы получили-бы, если бы представили себѣ, что

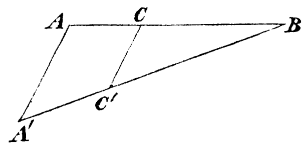


Рис. 57.

импульсъ $AA'.m_1$ подѣйствовалъ на массу m_1+m_2, связанную съ точкою C, ибо тогда скорость CC' опредѣлилась бы изъ уравненія $AA'.m_1 = CC'(m_1+m_2)$.

Точно также очевидно, если система точекъ находится, кромѣ взаимныхъ силъ, еще подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, то моментъ ея количествъ движенія не остается уже вообще одинъ и тотъ-же. Измѣненіе-же этого момента обусловливается только внѣшними силами. Обозначимъ черезъ ∂ длину перпендикуляра опущеннаго изъ даннаго начала на направленіе ускоренія g нѣкоторой точки системы, черезъ δ—длину перпендикуляра на направленіе одной изъ взаимныхъ силъ f, приложенной къ этой точкѣ, и черезъ $\mathfrak{d}$—длину перпендикуляра на соотвѣтственную внѣшнюю силу F. Тогда, образуя геометрическую сумму моментовъ ускореній всѣхъ массовыхъ единицъ системы, мы получимъ, на основаніи (49):

$$\Sigma mg.\partial = \Sigma f.\delta + \Sigma F.\mathfrak{d}\ , \tag{54}$$

или такъ какъ, на основаніи свойствъ взаимныхъ силъ $\Sigma f.\partial = 0$, то

$$\Sigma mg.\partial = \Sigma F.\mathfrak{d}\ . \tag{55}$$

Приращеніе-же въ, теченіи элемента времени dt, момента количествъ движенія системы, которое мы обозначимъ черезъ $\Delta\Sigma mv.\delta$, гдѣ δ есть соотвѣтственный перпендикуляръ на направленіе скорости v, опредѣлится изъ соотношенія:

$$\Delta\sum mv.\delta = \sum(mg.\partial)\,dt\,.$$

Слѣдовательно по (55):

$$\Delta\sum mv.\delta = \sum(F.\mathfrak{d})\,dt\,. \tag{56}$$

Такимъ образомъ, зная величину, направленіе и точки приложенія внѣшнихъ силъ, мы можемъ вычислить для каждаго элемента времени величину $\Sigma(F.\mathfrak{d})\ dt$, которая представитъ намъ приращеніе геометрической суммы моментовъ количествъ движенія системы.

Величина внѣшнихъ силъ и ихъ точки приложенія могутъ быть очевидно таковы, что или геометрическая сумма этихъ силъ, или геометрическая сумма ихъ моментовъ, или обѣ суммы вмѣстѣ, равны нулю.

Въ первомъ случаѣ, т. е. когда

$$\Sigma F = 0\ ,$$

центръ инерціи системы остается въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно. Дѣйствіе внѣшнихъ силъ проявляется въ такомъ случаѣ въ измѣненіи геометрической суммы площадей, описываемыхъ въ равные промежутки времени массовыми единицами системы около ея центра инерціи или другой какой-либо произвольно выбранной неподвижной точки. Кромѣ того въ данномъ случаѣ, на основаніи (30), моментъ внѣшнихъ силъ будетъ одинъ и тотъ-же около всякаго неподвижнаго начала; слѣдовательно и приращеніе упомянутой геометрической суммы описываемыхъ площадей будетъ для даннаго промежутка времени одно и тоже, около какой неподвижной точки мы эти площади ни отсчитывали-бы. Обозначимъ черезъ $\mathfrak{M}$ моментъ количества движенія системы, для даннаго момента времени, около нѣкоторой произвольно выбранной точки A, черезъ $\mathfrak{M}_0$—такой-же моментъ, для того-же момента времени, около центра инерціи системы, черезъ M—массу системы, черезъ V—скорость центра инерціи и черезъ d—перпендикуляръ изъ A на V. Тогда мы имѣемъ вообще:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + MV \cdot d\,. \tag{57}$$

Для какого нибудь другаго времени мы вообще будемъ имѣть для той-же системы

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_0' + MV' \cdot d'. \tag{58}$$

Если геометрическая сумма внѣшнихъ силъ равна нулю, то $V' = V$ и $d' = d$. Слѣдовательно тогда

$$\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0' \sim \mathfrak{M}_0\,, \tag{59}$$

и кромѣ того для даннаго времени $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}'$ будутъ соотвѣтственно одинаковы около всякаго начала. Отсюда заключаемъ, что *приращеніе момента количества движенія подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, геометрическая сумма которыхъ равна нулю, будетъ въ данный промежутокъ времени одно и тоже—какъ около любаго неподвижнаго начала, такъ и около движущагося центра инерціи системы.* Но моментъ количества движенія системы, вычисленный для даннаго момента времени, представляетъ геометрическую сумму площадей, которыя описали-бы около соотвѣтствующаго начала всѣ массовыя единицы системы въ теченіи единицы времени, если-бы моментъ количества движенія остался неизмѣннымъ. Слѣдовательно, приращеніе упомянутаго момента представляетъ, для каждаго времени, соотвѣтствующее

приращеніе геометрической суммы площадей, которое по предъидущему будетъ для даннаго промежутка времени одно и тоже, около всякой неподвижной точки и около движущагося равномѣрно и прямолинейно центра инерціи.

Очевидно также, что для разсматриваемаго случая, т. е. когда $\Sigma F = 0$, дѣйствіе внѣшнихъ силъ на систему, по отношенію къ измѣненію ея момента количества движенія, можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ всякой пары силъ, моментъ которой равнялся бы по величинѣ и направленію моменту данныхъ внѣшнихъ силъ. При этомъ конечно измѣненія, производимыя данными силами или замѣняющею ихъ парою въ скоростяхъ отдѣльныхъ точекъ системы, будутъ вообще различны.

Если геометрическая сумма ΣF не равна нулю, но при этомъ существуетъ нѣкоторое начало, около котораго геометрическая сумма моментовъ силъ обращается въ нуль, т. е. если

$$\Sigma F . \mathfrak{b} = 0\,,$$

то геометрическая сумма площадей, описываемыхъ массовыми единицами около упомянутой точки въ равные промежутки времени, остается одна и таже. Количество движенія центра инерціи при этомъ очевидно будетъ измѣняться, также какъ и моментъ количества движенія системы около другихъ точекъ, кромѣ упомянутаго выше начала. По отношенію къ измѣненію момента количества движенія системы около другихъ точекъ, внѣшнія силы въ данномъ случаѣ могутъ быть замѣнены одною, проходящею черезъ точку нулеваго момента и равною геометрической суммѣ всѣхъ данныхъ.

Если точка нулеваго момента совпадаетъ съ центромъ инерціи, т. е. если равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ проходитъ черезъ этотъ послѣдній, то результатъ дѣйствія этихъ силъ будетъ состоять только въ измѣненіи движенія центра инерціи; измѣненіе-же момента количества движенія около какого нибудь начала, не совпадающаго съ центромъ инерціи, будетъ зависѣть только отъ измѣненія скорости этого послѣдняго. Дѣйствительно, на основаніи (30), геометрическая сумма моментовъ количества движенія системы около любаго начала будетъ равна только моменту геометрической суммы количествъ движенія, приложенныхъ къ центру инерціи, т. е. моменту количествъ движенія самого центра инерціи.

Если моментъ внѣшнихъ силъ будетъ равенъ нулю около всякаго начала, то внѣшнія силы должны быть приложены по направленію внутреннихъ, и геометрическая сумма ихъ равна нулю; т. е. другими словами, эти силы не производятъ никакого измѣненія во внѣшнемъ движеніи системы, по отношенію къ центру инерціи и описываемымъ площадямъ.

Наконецъ, въ самомъ общемъ случаѣ, когда геометрическая сумма внѣшнихъ силъ не равна нулю и когда нѣтъ точки нулеваго момента, измѣняется какъ движеніе центра инерціи, такъ и величина момента количества движенія. При этомъ, какъ это видно непосредственно изъ (57), измѣненіе момента количества движенія, около любаго начала A, будетъ равно суммѣ измѣненій момента около центра инерціи и момента количества движенія самаго центра инерціи около A. Эти измѣненія могутъ быть представлены, какъ результатъ дѣйствія нѣкоторой силы, приложенной къ центру инерціи и нѣкоторой пары.

Разсмотрѣнныя выше дѣйствія внѣшнихъ силъ на систему матеріальныхъ точекъ ведутъ насъ къ болѣе точному представленію о матеріальной точкѣ, связанной съ опредѣленною массою, какъ о центрѣ инерціи этой массы. Дѣйствительно, имѣя въ виду изслѣдовать только измѣненія движенія массы, одинакія для всѣхъ ея точекъ, мы вполнѣ опредѣлимъ эти измѣненія, изслѣдуя движеніе ея центра инерціи; а это послѣднее опредѣляется величиною и направленіемъ силъ, дѣйствующихъ на массу извнѣ, независимо отъ ихъ точекъ приложенія, вслѣдствіе чего мы можемъ въ данномъ случаѣ разсматривать всѣ эти силы приложенными къ одной матеріальной точкѣ, въ которой сосредоточена вся масса системы, т. е. къ центру инерціи. Представляя матеріальную систему, какъ состоящую изъ матеріальныхъ точекъ, мы разсматриваемъ большее или меньшее число центровъ инерціи новыхъ матеріальныхъ системъ, на которыя подраздѣляемъ старую. Такое подраздѣленіе мы ведемъ до тѣхъ поръ пока не остановимся на такихъ системахъ, движеніе которыхъ около ихъ соотвѣтственныхъ центровъ инерціи мы не можетъ опредѣлить, или не считаемъ нужнымъ опредѣлять, для рѣшенія соотвѣтствующей задачи.

26. Работа силы.

Если точка приложенія силы движется, то та часть силы, которая направлена по одной прямой съ перемѣщеніемъ ея точки приложенія, производитъ работу. Работа силы измѣряется произведеніемъ изъ длины пути, пройденнаго точкою приложенія силы и величины силы, совпадающей съ направленіемъ этого пути.

Вообще направленія силы и движенія ея точки приложенія не совпадаютъ другъ съ другомъ. Такъ, при всякомъ криволинейномъ движеніи направленія ускоренія, т. е. силы, и скорости, т. е. элемента пути движущейся точки, различны. Точно также и въ случаѣ прямолинейнаго движенія направленія движенія и разсматриваемой силы могутъ не совпадать другъ съ другомъ, если эта послѣдняя во все время движенія уравновѣшивается другою силою ей равною и противоположною. Слѣдовательно, чтобы опредѣлить величину работы, соотвѣтствующей данному перемѣщенію, нужно найти часть силы, совпадающую съ перемѣщеніемъ. Эта послѣдняя представляется очевидно тою изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ слагающихъ данной силы, которая совпадаетъ съ перемѣщеніемъ (см. § 5), и будетъ слѣдовательно ортогональнымъ проложеніемъ силы на перемѣщеніе. Итакъ, если F и s суть величины данной силы и прямолинейнаго перемѣщенія ея точки приложенія, а α—уголъ между направленіями упомянутыхъ величинъ, то работа L, соотвѣтствующая перемѣщенію s, будетъ

$$L = F \cdot \cos\alpha \cdot s, \qquad (60)$$

и слѣдовательно выразится произведеніемъ: или изъ проложенія силы на перемѣщеніе и величины перемѣщенія, или изъ проложенія перемѣщенія на силу и величины силы.

Если сила направлена перпендикулярно къ данному перемѣщенію, то работа ея при этомъ перемѣщеніи равна нулю; если направленія силы и перемѣщенія образуютъ тупой уголъ, то соотвѣтствующая работа отрицательная, ибо косинусъ тупаго угла отрицательный. Но съ другой стороны сила, перпендикулярная къ данному направленію или ему прямо противоположная не можетъ обусловливать въ этомъ направленіи перемѣщенія, т. е. положительнаго приращенія скорости. Слѣдовательно, если работа силы для даннаго перемѣ-

щенія равна нулю или отрицательная, то соотвѣтствующее перемѣщеніе вызвано не этою силою. Такъ напримѣръ, при равномѣрнозамедлительномъ движеніи работа замедляющей силы отрицательная, и перемѣщеніе движущейся точки обусловлено не силою, дѣйствующею противъ этого перемѣщенія, но первоначальною скоростію; при равномѣрномъ движеніи по кругу работа центростремительной силы равна нулю, и перемѣщеніе точки по кругу обусловлено первоначальною скоростію по касательной, и т. п.

Если къ данной точкѣ приложено нѣсколько силъ $F_1, F_2 \ldots F_n$, направленія которыхъ образуютъ углы $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ съ перемѣщеніемъ s точки, то сумма работъ этихъ силъ будетъ

$$L = (F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + \cdots F_n \cos\alpha_n)\, s\,. \qquad (61)$$

Но величина въ скобкахъ, выражая сумму проложеній данныхъ силъ на линію s, представляетъ (§ 4) проложеніе на туже линію ихъ равнодѣйствующей; т. е. если F будетъ эта равнодѣйствующая и α—ея уголъ съ s, то

$$(F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + \cdots F_n \cos\alpha_n)\, s = F \,.\, \cos\alpha \,.\, s\,. \qquad (62)$$

Слѣдовательно, алгебраическая сумма работъ данныхъ силъ, приложенныхъ къ данной точкѣ, равна работѣ ихъ равнодѣйствующей. Точно также, если $s_1, s_2 \ldots s_n$ суть слагающія даннаго перемѣщенія по какимъ нибудь n направленіямъ, то, обозначая черезъ $a_1, a_2, \ldots$ углы этихъ направленій съ силою F, мы имѣемъ

$$s \cos\alpha = s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + \cdots s_n \cos a_n\,,$$

ибо проложеніе s на какое нибудь направленіе равно суммѣ проложеній на тоже направленіе составляющихъ отъ s. Слѣдовательно:

$$F \cos\alpha \,.\, s = F \cos a_1 \,.\, s_1 + F \cos a_2 \,.\, s_2 + \cdots F \cos a_n \,.\, s_n\,, \qquad (62')$$

т. е. алгебраическая сумма работъ, выполненныхъ данною силою при различныхъ перемѣщеніяхъ ея точки приложенія, равна работѣ той-же силы при результирующемъ перемѣщеніи.

Если точка приложенія силы движется криволинейно, то работа силы на данномъ отрѣзкѣ кривой будетъ равна суммѣ работъ на прямолинейныхъ элементахъ, изъ которыхъ этотъ отрѣзокъ составленъ. При этомъ величина и направленіе силы на разныхъ элементахъ мо-

гутъ быть различны; но самые элементы должны быть выбраны на столько малыми, что для каждаго изъ нихъ величина и направленіе силы могутъ быть разсматриваемы, какъ неизмѣнныя. Слѣдовательно, если F, ds и α представляютъ силу на данномъ элементѣ кривой, длину элемента и уголъ между F и s, то работа на данномъ отрѣзкѣ кривой выразится алгебраической суммой

$$L = \sum F \,.\, \cos\alpha \,.\, ds\,, \tag{63}$$

въ которой будетъ столько слагающихъ, сколько элементовъ длины ds укладывается въ данномъ отрѣзкѣ кривой.

Каждая элементарная работа $F\cos\alpha \,.\, ds$ можетъ быть выражена площадью прямоугольника, основаніе котораго равно длинѣ элемента ds, а высота—силѣ $F\cos\alpha$, дѣйствующей въ направленіи этого послѣдняго. Сумма подобныхъ элементарныхъ площадей выразитъ всю работу L въ форм. (63), и представитъ площадь, между прямою AB (рис. 58), длина которой равна длинѣ отрѣзка s, и кривою ab, представляющею законъ измѣненія тангенціальной силы по различнымъ элементамъ. За основанія элементарныхъ прямоугольниковъ мы можемъ брать величины $ds \,.\, \cos\alpha$, т. е. проложенія элементовъ пути на силу, а за высоты F. Тогда работа L выразится площадью. между прямою $A'B'$, вообще другой длины чѣмъ AB, и кривою $a'b'$, отличною отъ ab; но эта площадь очевидно должна быть равновелика первой, ибо обѣ онѣ измѣряютъ одну и туже величину L и составлены изъ одинаковаго числа равновеликихъ элементарныхъ площадей.

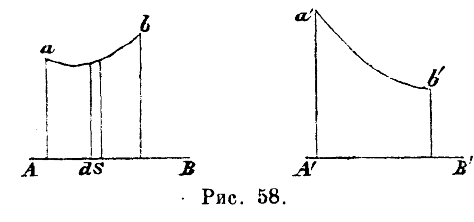


Рис. 58.

Работа мгновенной силы выразится также произведеніями (60) или (63), гдѣ каждое перемѣщеніе ds будетъ представлять ту длину, на которую точка приложенія мгновенной силы передвинута въ теченіи времени t дѣйствія этой силы. Обозначая импульсъ силы F черезъ J, мы имѣемъ

$$J = Ft \quad \text{и} \quad L = J\cos\alpha\,\frac{ds}{t}\cdot \tag{63'}$$

Такъ какъ время t безконечно мало, то отношеніе $\frac{ds}{t}$ можетъ быть конечною величиною, и слѣдовательно, работа мгновенной силы, при

безконечно маломъ перемѣщеніи ея точки приложенія, можетъ быть конечною.

Единица работы выполняется, когда точка приложенія, единицы силы, т. е. дины, перемѣщается на единицу длины, т. е. на одинъ центиметръ, въ направленіи этой силы. Такимъ образомъ опредѣленная единица работы носитъ названіе—эргъ. Очевидно, что эргъ, будучи выраженъ въ основныхъ единицахъ длины, времени и массы, представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\text{эргъ} = \text{дин. цет.} = \frac{\text{грам. цен.}^2}{\text{сек.}^2}, \tag{64}$$

т. е.

$$\text{эргъ} = \text{грам. (един. скорости)}^2, \tag{64'}$$

откуда видимъ, что работа всегда представляется какъ нѣкоторая масса, умноженная на квадратъ нѣкоторой скорости.

Замѣтимъ, что вообще всякая величина, выражающая произведеніе изъ силы и длины, какъ напримѣръ моментъ силы, измѣряется единицами, составленными изъ произведенія дина. цент. и однородными съ эргомъ; но очевидно, такія величины не всегда будутъ представлять нѣкоторую совершенную работу. Однако всегда можно себѣ представить такую работу, которая, будучи совершена, выразится упомянутою величиною. Такъ напримѣръ, представимъ себѣ нѣкоторую силу F, обусловливающую нѣкоторый моментъ въ M ед. момент.; пусть d будетъ разстояніе точки приложенія силы отъ начала момента и пусть F будетъ перпендикулярна къ d. Тогда

$$M \text{ ед. мом.} = F \,.\, d \text{ дин. цент.}$$

Если теперь точка приложенія силы F опишетъ около начала момента дугу круга въ углѣ равномъ единицѣ, и во все время этого перемѣщенія F будетъ оставаться перпендикулярна къ d, то сотовѣтствующая работа будетъ очевидно

$$F \,.\, d \text{ дин. цент.} = M \text{ эрг.}$$

---

§ 27. Общее условіе равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на свободную или несвободную точку.

Силы, дѣйствующія на одну или нѣсколько матеріальныхъ точекъ, свободныхъ или несвободныхъ, тогда находятся въ р а в н о-

вѣсіи, когда не могутъ обусловливать такихъ перемѣщеній точекъ, какія для нихъ возможны. Такое опредѣленіе равновѣсія не исключаетъ очевидно возможности, для каждой изъ взаимно уравновѣшивающихся силъ въ отдѣльности, производить то или другое изъ возможныхъ перемѣщеній точки или системы, ибо только совокупное дѣйствіе силъ обусловливаетъ ихъ равновѣсіе, которому каждая сила отдѣльно можетъ и не удовлетворять. Система, находящаяся подъ дѣйствіемъ взаимноуравновѣшивающихся силъ, можетъ вообще находиться въ покоѣ или какомъ угодно движеніи; но въ этомъ послѣднемъ случаѣ соотвѣтствующія ускоренія будутъ обусловливаться не взаимноуравновѣшивающимися силами, а какими либо другими.

Если матеріальная точка совершенно свободна, то всякая сила къ ней приложенная обусловитъ нѣкоторое измѣненіе движенія, что слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія силы. Слѣдовательно нѣсколько силъ, приложенныхъ къ одной матеріальной точкѣ, тогда взаимно уравновѣшиваются, когда ихъ равнодѣйствующая, т. е. геометрическая сумма, равна нулю. Тоже самое условіе можно выразить другими словами, утверждая, что сумма работъ взаимноуравновѣшивающихся силъ, приложенныхъ къ одной свободной точкѣ, будетъ равна нулю при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, которыя мы можемъ приписать свободной точкѣ. Дѣйствительно, упомянутая сумма работъ будетъ всегда равна работѣ равнодѣйствующей; а эта послѣдняя равна нулю.

Если матеріальная точка будетъ не свободна, т. е. если она заранѣе не будетъ имѣть возможности перемѣщаться по нѣкоторымъ направленіямъ, то силы, на нее дѣйствующія, будутъ и подавно уравновѣшивать другъ друга, если вышеизложенное условіе удовлетворяется, т. е. если равнодѣйствующая этихъ силъ равна нулю. Но очевидно, это условіе не есть необходимое, ибо точка будетъ въ положеніи равновѣсія, когда равнодѣйствующая къ ней приложенныхъ силъ и не равна нулю, но направлена въ ту сторону, куда точка не можетъ перемѣщаться, будучи по условію несвободна.

Ограниченіе свободы перемѣщеній матеріальной точки мы можемъ себѣ представить въ слѣдующихъ видахъ: 1) точка не можетъ оставить нѣкоторую поверхность, или нѣкоторую линію; т. е. можетъ перемѣщаться только по данной поверхности, или линіи (другими словами, по двумъ поверхностямъ заразъ); 2) точка не можетъ перейти

на другую сторону данной поверхности или двухъ, или трехъ взаимнопересѣкающихся поверхностей; т. е. точка можетъ перемѣщаться по данной поверхности, но можетъ ее оставить только въ одну сторону отъ нея, или можетъ оставить поверхность, только перейдя на другую поверхность или линію. Въ первомъ случаѣ, если точка, будучи помѣщена на данномъ элементѣ поверхности или линіи, не можетъ оставить этого элемента, и перемѣщается только вдоль по нему, мы заключаемъ, что точка не можетъ перемѣщаться относительно той плоскости или прямой линіи, безконечно малыми частями которыхъ мы себѣ представляемъ элементъ поверхности или линіи. Невозможность же перемѣщенія относительно плоскости или линіи соотвѣтствуетъ, какъ было объяснено въ § 5, невозможности движенія по перпендикуляру къ той или другой. Слѣдовательно, если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ данной матеріальной точкѣ, направлена въ ту или другую сторону вдоль по нормали къ поверхности или линіи, съ которыхъ точка не можетъ сходить прочь, то эта равнодѣйствующая не будетъ въ состояніи произвести ни одного изъ возможныхъ для точки перемѣщеній, ибо эти послѣднія будутъ перпендикулярны къ упомянутой равнодѣйствующей; а этого достаточно для удовлетворенія условія равновѣсія. Для каждаго элемента поверхности или линіи направленіе равнодѣйствующей будетъ различно, и слѣдовательно данная сила, удовлетворяющая условію равновѣсія на одномъ элементѣ, не будетъ ему удовлетворять на другомъ, если ея направленіе не измѣнится. Но въ различныхъ безконечно другъ къ другу близкихъ точкахъ одного и того-же поверхностнаго или линейнаго элемента одна и таже сила будетъ выполнять условія равновѣсія, ибо всѣ точки такого элемента принадлежатъ одной и той-же плоскости или прямой линіи, перпендикуляры къ которымъ не мѣняютъ своего направленія.

Если матеріальная точка, находящаяся при упомянутомъ условіи въ равновѣсіи на какомъ нибудь плоскомъ или линейномъ элементѣ, будетъ передвинута вдоль соотвѣтствующей поверхности или линіи безъ нарушенія равновѣсія, т. е. если во время перемѣщенія сила будетъ оставаться перпендикулярною къ соотвѣтствующимъ элементамъ, то работа силы будетъ очевидно равна нулю. Но если точка будетъ передвинута безконечно мало, то она не выйдетъ изъ соотвѣтствующаго элемента и будетъ оставаться въ условіяхъ равновѣсія. Слѣдовательно, условіе равновѣсія точки на какомъ нибудь

элементѣ поверхности или линіи, которыхъ точка не можетъ покинуть, будетъ состоять въ томъ, что работа силы, дѣйствующей на точку, будетъ равна нулю при всякомъ возможномъ безконечно маломъ перемѣщеніи точки.

Если точка можетъ перемѣщаться вдоль по поверхности и въ одну сторону отъ этой послѣдней, то она останется въ равновѣсіи, если сила, къ ней приложенная, будетъ направлена по нормали къ поверхности, и притомъ—въ сторону противоположную той, по которой точка можетъ покинуть поверхность. Условіе равновѣсія при этомъ, по отношенію къ возможной работѣ, выразится тѣмъ, что при всякомъ возможномъ перемѣщеніи точки работа силы къ ней приложенной будетъ равна нулю (когда возможное перемѣщеніе идетъ по поверхности перпендикулярно къ силѣ) или будетъ отрицательная (когда возможное перемѣщеніе идетъ прочь отъ поверхности, и стало быть, подъ тупымъ угломъ къ силѣ).

Разобранные выше частные случаи равновѣсія свободной или несвободной точки уясняютъ намъ слѣдующее общее заключеніе относительно условій равновѣсія матеріальной точки. Если силы, дѣйствующія на матеріальную точку, взаимно уравновѣшиваются, то ихъ равнодѣйствующая не можетъ произвести ни одного изъ возможныхъ для точки перемѣщеній. Слѣдовательно, если мы представимъ себѣ какое либо изъ такихъ перемѣщеній совершившимся, то работа равнодѣйствующей, или сумма работъ слагающихъ, не можетъ при этомъ быть положительною, ибо упомянутое перемѣщеніе обусловливается не данными силами. Всякое возможное перемѣщеніе должно быть выбираемо при этомъ такимъ образомъ, чтобы на его протяженіи величина и направленіе разсматриваемыхъ силъ не измѣнялись; слѣдовательно вообще перемѣщеніе должно быть выбрано безконечно малымъ. Итакъ, *силы, дѣйствующія на свободную или несвободную матеріальную точку, будутъ въ равновѣсіи, если, при всякомъ возможномъ безконечно маломъ перемѣщеніи точки изъ ея даннаго положенія. работа упомянутыхъ силъ будетъ равна нулю или отрицательной величинѣ.*

Обозначимъ черезъ $f_1, f_2 \dots f_n$ силы, дѣйствующія на данную матеріальную точку, и черезъ δs—одно изъ произвольно выбранныхъ возможныхъ безконечно малыхъ перемѣщеній точки. Тогда вышеупо-

мянутое условіе равновѣсія выразится рядомъ такихъ соотношеній:

$$[f_1 \cos(\delta s, f_1) + f_2 \cos(\delta s, f_2) + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n \cos(\delta s, f_n)]\,\delta s \gtreqless 0\,, \qquad (65)$$

или короче:

$$[\Sigma f \cos(\delta s, f)]\,\delta s \gtreqless 0\,, \qquad (65)'$$

которыя должны существовать для каждаго изъ возможныхъ для точки перемѣщеній δs; или другими словами, неравенство (65) должно быть удовлетворено любымъ изъ возможныхъ перемѣщеній δs.

Такъ какъ величина и направленіе каждой силы (какъ вообще всякаго вектора) вполнѣ опредѣляются тремя составляющими по тремъ даннымъ осямъ координатъ, то и условіе равновѣсія силъ, опредѣляя эти послѣднія, должно давать соотношеніе между ихъ составляющими по даннымъ осямъ. Пусть $X_1, X_2 \ldots X_n$ будутъ составляющія силъ по оси x—овъ и $Y_1, Y_2 \ldots Y_n, Z_1, Z_2 \ldots Z_n$ — по двумъ другимъ осямъ; пусть δx, δy, δz будутъ проложенія на соотвѣтствующія оси какого нибудь возможнаго перемѣщенія точки; тогда работа силы X_1 при этомъ перемѣщеніи, равная произведенію изъ силы и проложенія перемѣщенія на силу, будетъ очевидно $X_1\,\delta x$, и т. д. Такъ какъ работа равнодѣйствующей равна алгебраической суммѣ работъ слагающихъ, то условіе (65) выразится черезъ

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2 + \cdot \cdot \cdot X_n)\,\delta x + (Y_1 + Y_2 + \cdot \cdot \cdot Y_n)\,\delta y \\ + (Z_1 + Z_2 + \cdot \cdot \cdot Z_n)\,\delta z \gtreqless 0\,,\end{aligned} \qquad (66)$$

или вообще:

$$(\Sigma X)\,\delta x + (\Sigma Y)\,\delta y + (\Sigma Z)\,\delta z \gtreqless 0\,, \qquad (66)'$$

гдѣ суммы, какъ и въ $(65)'$, берутся алгебраически. Давая величинамъ $\delta x, \delta y, \delta z$ различныя положительныя и отрицательныя значенія, мы очевидно можемъ перепробовать всѣ возможныя для разсматриваемой точки перемѣщенія.

Если точка свободна, т. е. если для нея всѣ перемѣщенія возможны, то условіе $(66)'$ можетъ существовать только въ видѣ равенства. Дѣйствительно, если для нѣкоторыхъ величинъ δx, δy, δz лѣвая часть $(66)'$ дѣлается отрицательною, то для тѣхъ-же величинъ, но съ обратными знаками, которыя тоже возможны, она дѣлается положительною. Слѣдовательно условіе въ видѣ неравенства можетъ

существовать только тогда, когда возможное для точки перемѣщеніе есть такого рода, что его проложенія не могутъ одновременно мѣнять своего знака, т. е. когда вмѣстѣ съ даннымъ перемѣщеніемъ не возможно ему прямо противоположное. Возвращаясь къ случаю свободной точки, мы видимъ, что сумма трехъ произвольныхъ и независящихъ другъ отъ друга величинъ, хотя и безконечно малыхъ, тогда будетъ равна нулю, когда каждый членъ суммы отдѣльно равенъ нулю, т. е. когда

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

ибо сами δx, δy, δz всегда быть равными нулю очевидно не могутъ. Такимъ образомъ приходимъ къ извѣстному уже намъ условію равновѣсія свободной точки.

Если точка не можетъ сойти съ плоскости, то представляя себѣ оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось z—овъ была перпендикулярна къ плоскости, будемъ имѣть всегда $\delta z = 0$, а слѣдовательно $(\Sigma Z)\,\delta z = 0$, какова бы ни была ΣZ; условіе же $(66)'$ обратится въ

$$\sum X.\delta x + \sum Y.\delta y \overline{\overline{<}}\, 0,$$

при чемъ, такъ какъ движеніе въ плоскости возможно во всѣ стороны, то δx и δy, будучи произвольны, могутъ быть вмѣстѣ отрицательны и положительны; поэтому условіе можетъ существовать только въ видѣ равенства, и каждый членъ суммы долженъ обращаться въ нуль; т. е. должно быть:

$$\Sigma X = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma Y = 0,$$

откуда видимъ, что точка будетъ въ равновѣсіи, когда на нее дѣйствуетъ какая нибудь сила ΣZ, перпендикулярная къ плоскости свободныхъ перемѣщеній.

Предположимъ, что, при томъ же выборѣ осей координатъ, точка можетъ оставить свою плоскость, но только—въ сторону положительнаго направленія оси z—овъ, при чемъ въ самой плоскости она можетъ перемѣщаться во всѣ стороны. Этому предположенію будетъ соотвѣтствовать очевидно условіе, что δz можетъ быть только положительнымъ, а δx и δy могутъ быть какія угодно, независимо другъ отъ друга и отъ δz. Такъ какъ перемѣщеніе $\delta z = 0$ есть одно изъ возможныхъ, то должно между прочимъ оправдываться условіе

$$\sum X.\delta x + \sum Y.\delta y \overline{\overline{<}}\, 0,$$

которое, какъ прежде, при совершенной произвольности δx и δy, приводитъ къ заключенію, что $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$, вслѣдствіе чего $(66)'$ обращается въ

$$\sum Z.\delta z \overline{\underset{<}{=}} 0\,,$$

гдѣ δz можетъ быть только положительнымъ (или нулемъ). Слѣдовательно

$$\Sigma Z \overline{\underset{<}{=}} 0\,;$$

т. е. точка будетъ въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силы, перпендикулярной къ плоскости ея возможныхъ перемѣщеній и направленной въ ту сторону, въ которую точка не можетъ сойти съ плоскости.

Если точка не можетъ сойти съ данной линіи, которую мы можемъ выбрать за ось Z—овъ, то $\delta x = 0$ и $\delta y = 0$; слѣдовательно условіе $(66)'$ обращается въ $\Sigma Z.\delta z \overline{\underset{<}{=}} 0$, или по произвольности δz въ $\Sigma Z = 0$. При этомъ очевидно, ΣX и ΣY могутъ быть какія угодно.

§ 28. Общее условіе равновѣсія свободной или несвободной системы связанныхъ между собою матеріальныхъ точекъ.

Точки системы связаны другъ съ другомъ, когда одно изъ перемѣщеній какой либо изъ этихъ точекъ влечетъ за собою необходимо перемѣщенія другихъ. Но это опредѣленіе связности системы вообще не исключаетъ возможности существованія для данной точки такого перемѣщенія, при которомъ остальныя точки, всѣ или нѣкоторыя, останутся на своихъ прежнихъ мѣстахъ. Большее или меньшее число такихъ перемѣщеній точекъ системы, при которыхъ одни передвиженія необходимо вызываютъ другія, обусловливаетъ большую или меньшую степень связности системы.

Система будетъ въ равновѣсіи, если про каждую ея точку мы можемъ сказать, что равнодѣйствующая къ ней приложенныхъ силъ не направлена ни по одному изъ возможныхъ для точки перемѣщеній. Трудность опредѣленія случаевъ, когда вышесказанное условіе осуществляется, заключается въ томъ, что равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на данную точку системы, опредѣляется не однѣми только данными силами, приложенными непосредственно къ этой

точкѣ, но и силами, приложенными къ другимъ точкамъ системы, связаннымъ съ первою. Такимъ образомъ мы должны прежде всего изслѣдовать, какія силы прибавляются къ даннымъ непосредственно приложеннымъ къ точки силамъ,—прибавляются вслѣдствіе дѣйствія силъ на другія точки, связанныя съ первою. Условія связности системы должны быть при этомъ даны вполнѣ; т. е. мы должны знать, какія перемѣщенія точекъ системы изъ ея даннаго положенія обусловливаются каждымъ изъ возможныхъ перемѣщеній любой ея точки въ отдѣльности.

Представимъ себѣ силу, приложенную къ данной точкѣ A системы по одному изъ ея возможныхъ перемѣщеній δs. Въ такомъ случаѣ упомянутое перемѣщеніе будетъ имѣть мѣсто, и вызоветъ собою еще перемѣщенія $\delta s_1, \delta s_2 \ldots$ и т. д. нѣкоторыхъ другихъ точекъ B, C, D и т. д. системы, направленіе и величину которыхъ мы можемъ опредѣлить по направленію и величинѣ δs_1, на основаніи данныхъ заранѣе условій связности системы. Но такъ какъ тѣже самыя перемѣщенія остальныхъ точекъ могли бы быть вызваны непосредственно силами, приложенными къ каждой изъ нихъ вдоль по упомянутымъ перемѣщеніямъ, то заключаемъ, что сила, приложенная къ данной точкѣ системы вдоль по одному изъ ея возможныхъ перемѣщеній, дѣйствуетъ на другія точки той-же системы такъ, какъ рядъ силъ, приложенныхъ къ этимъ точкамъ вдоль по тѣмъ изъ ихъ возможныхъ перемѣщеній, совмѣстное существованіе которыхъ съ первымъ вызывается условіями системы. Къ точкамъ B, C, D и т. д. мы можемъ приложить силы, направленныя противоположно перемѣщеніямъ $\delta s_2, \delta s_3 \ldots$ и т. д., вызваннымъ перемѣщеніемъ δs_1. Тогда при опредѣленномъ выборѣ величины упомянутыхъ силъ можетъ случиться, что возможность перемѣщеній $\delta s_2, \delta s_3 \ldots$ и т. д. не будетъ уже имѣть мѣста, т. е. что вновь приложенныя силы уравновѣсятъ силу, дѣйствующую на A. Такое заключеніе очевидно останется при своемъ значеніи не зависимо отъ того, будутъ ли перемѣщенія δs_1, $\delta s_2, \delta s_3, \ldots$ единственно возможными для системы, или рядомъ съ ними будетъ существовать возможность для другихъ перемѣщеній, которыя вызовутся другими силами. Равновѣсіе вышеупомянутыхъ силъ слѣдовательно не нарушится, если мы, увеличивъ степень связности системы, сдѣлаемъ перемѣщенія $\delta s_1, \delta s_2 \ldots$ единственно для нея возможными. Измѣняя величину силы, приложенной къ точкѣ A по направленію δs_1, мы должны измѣнить и величину уравновѣши-

вающихся силъ, приложенныхъ къ другимъ точкамъ обратно перемѣщеніямъ $\delta s_2, \delta s_3$ и т. д., но очевидно не направленія этихъ силъ, ибо направленія перемѣщеній $\delta s_1, \delta s_2 \ldots$ не зависятъ отъ величины производящихъ ихъ силъ.

Предположимъ теперь, что къ точкѣ A приложена нѣкоторая сила, направленная перпендикулярно къ ея возможному перемѣщенію δs_1. Въ такомъ случаѣ упомянутая сила не произведетъ этого перемѣщенія и не вызоветъ слѣдовательно также перемѣщеній $\delta s_2, \delta s_3 \ldots$ другихъ точекъ; т. е. сила, приложенная къ точкѣ A, въ данномъ случаѣ будетъ дѣйствовать на другія точки системы B, C, D и т. д. такимъ же образомъ, какъ рядъ силъ, приложенныхъ непосредственно къ этимъ точкамъ и направленнымъ вообще подъ прямыми или тупыми углами къ ихъ возможнымъ перемѣщеніямъ $\delta s_2, \delta s_3 \ldots$. Но подъ тупыми углами эти силы не могутъ дѣйствовать, ибо разлагая каждую изъ нихъ на двѣ, такъ чтобы однѣ изъ ихъ составляющихъ были перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ возможнымъ перемѣщеніямъ $\delta s_2, \delta s_3$ и т. д., а другія имъ прямо противоположны, мы найдемъ, что эти послѣднія или должны быть уравновѣшены силою, приложенною къ A вдоль по перемѣщенію δs_1, чего мы не предполагаемъ, или должны вызвать это перемѣщеніе, чего мы тоже не предполагаемъ, ибо сила, дѣйствующая на A, перпендикулярна къ δs_1. Итакъ силы, приложенныя къ одной точкѣ системы, перпендикулярно къ какому нибудь изъ ея возможныхъ перемѣщеній, могутъ быть замѣнены, по отношенію къ другимъ точкамъ, только силами, направленными перпендикулярно же къ тѣмъ изъ возможныхъ перемѣщеній этихъ точекъ, которыя вызываются, по условіямъ системы, вышеупомянутымъ перемѣщеніемъ первой точки. Если слѣдовательно перемѣщенія $\delta s_1, \delta s_2 \ldots \delta s_n$ тѣмъ не менѣе будутъ какъ либо произведены, то работа каждой изъ упомянутыхъ прежде силъ будетъ при этомъ равна нулю.

Предположимъ теперь, что на точки 1, 2, 3 ... n данной системы дѣйствуютъ силы $F_1, F_2 \ldots F_n$, и разыщемъ общее условіе равновѣсія этихъ силъ. Для этого, какъ мы видѣли выше, нужно разсмотрѣть равновѣсіе каждой точки системы, принимая во вниманіе кромѣ силъ, непосредственно къ этимъ точкамъ приложенныхъ, еще силы, обусловливаемыя другими точками системы. Итакъ, обратимся сперва къ условіямъ равновѣсія точки 1, на которую, кромѣ силы F_1, дѣйствуютъ еще силы, обусловленныя силами $F_2, F_3 \ldots F_n$,

приложенными къ другимъ точкамъ. Силы такого рода, приложенныя къ точкѣ 1, мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ $f_2, f_3 \ldots f_n$, гдѣ f_2 обусловливается силою F_2, и т. д. Пусть δs_1 будетъ одно изъ возможныхъ перемѣщенiй точки 1; тогда одно изъ условiй ея равновѣсiя будетъ въ томъ, чтобы

$$[F_1 \cos(F_1, \delta s_1) + f_2 \cos(f_2, \delta s_1) + \cdots f_n \cos(f_n, \delta s_1)]\, \delta s_1 \overline{\underline{<}}\, 0, \quad (67)$$

причемъ такихъ условiй будетъ столько, сколько для разсматриваемой точки существуетъ возможныхъ перемѣщенiй.

Рядомъ съ данною системою вообразимъ еще новую систему совершенно свободныхъ $n-1$ точекъ: $2', 3' \ldots n'$. Каждую изъ этихъ точекъ соединимъ нерастяжимыми и несгибаемыми прямыми линiями $l_2, l_3, \ldots l_n$ соотвѣтственно съ точками $2, 3, \ldots n$; съ другой стороны, тѣже точки $2', 3' \ldots n'$ соединимъ такими же нерастяжимыми и несгибаемыми нитями $l_2'\, l_3' \ldots l_n'$ съ одною и тою же точкою 1. Точки вспомогательной системы можемъ всегда выбрать такъ, чтобы линiи $l_2, l_3 \ldots l_n$ не были соотвѣтственно перпендикулярны къ направленiямъ перемѣщенiй $\delta s_2, \delta s_3 \ldots \delta s_n$, обусловленныхъ перемѣщенiемъ δs_1, и ни одна изъ линiй $l_2', l_3' \ldots l_n'$ не была бы перпендикулярна къ δs_1. Такъ какъ всѣ линiи l и l' не измѣняютъ своей длины, то оба конца каждой изъ этихъ линiй могутъ перемѣщаться только такимъ образомъ, чтобы слагающiя этихъ перемѣщенiй вдоль по самымъ линiямъ были одинаковы, ибо упомянутыя слагающiя, будучи разной величины, обусловили бы измѣненiе длины линiй. Слѣдовательно, если мы назовемъ черезъ $\delta\sigma_2$, $\delta\sigma_3 \ldots \delta\sigma_n$ и т. п. перемѣщенiя точекъ $2', 3' \ldots n'$, которыя вызываются перемѣщенiями $\delta s_2, \delta s_3 \ldots \delta s_n$, то проложенiя δs_2 и $\delta\sigma_2$, δs_3 и $\delta\sigma_3, \ldots \delta s_n$ и $\delta\sigma_n$ на соотвѣтствующiя линiи $l_2, l_3 \ldots l_n$ будутъ попарно равны, т. е.

$$\begin{aligned} \delta s_2 \cos(l_2, \delta s_2) &= \delta\sigma_2 \cos(l_2, \delta\sigma_2), \\ \delta s_3 \cos(l_3, \delta s_3) &= \delta\sigma_3 \cos(l_3, \delta\sigma_3), \\ &\cdots\cdots \\ \delta s_n \cos(l_n, \delta s_n) &= \delta\sigma_n \cos(l_n, \delta\sigma_n). \end{aligned} \quad (68)$$

Точно также неизмѣнность длины линiй l' влечетъ за собою условiе, чтобы проложенiя перемѣщенiй δs_1 и $\delta\sigma_2$, δs_1 и $\delta\sigma_3 \ldots \delta s_1$ и $\delta\sigma_n$ на соотвѣтственныя линiи $l_2', l_3' \ldots l_n'$ были попарно равны, т. е. чтобы

$$\begin{aligned} \delta s_1 \cos(l_2', \delta s_1) &= \delta\sigma_2 \cos(l_2', \delta\sigma_2). \\ \delta s_1 \cos(l_3', \delta s_1) &= \delta\sigma_3 \cos(l_3', \delta\sigma_3), \\ &\cdots\cdots \\ \delta s_1 \cos(l_n', \delta s_1) &= \delta\sigma_n \cos(l_n', \delta\sigma_n). \end{aligned} \quad (69)$$

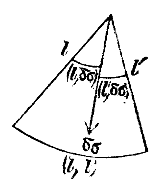
Кромѣ того очевидно, что разсматриваемыя перемѣщенія $\delta\sigma_2, \delta\sigma_3 \ldots \delta\sigma_n$, будучи обусловлены только своими составляющими соотвѣтственно по каждой парѣ линій l и l', должны лежать въ плоскостяхъ этихъ линій. Слѣдовательно, если мы обозначимъ черезъ (l, l') уголъ между двумя линіями l и l', то должны существовать слѣдующія соотношенія между углами $(l,\delta\sigma)$, $(l',\delta\sigma)$ и (l,l') (рис. 59):

$$(l,\delta\sigma) + (l',\delta\sigma) = (l,l')$$

или

$$(l,\delta\sigma) - (l',\delta\sigma) = \pm (l,l'),$$

смотря по тому, лежитъ ли $\delta\sigma$ внутри или внѣ угла (l,l'). Такимъ образомъ въ $2(n-1)$ уравненіяхъ (68) и (69) имѣемъ $2(n-1)$ неизвѣстныхъ, т. е. $n-1$ перемѣщеній $\delta\sigma$ и $n-1$ ихъ угловъ соотвѣтственно съ одною изъ линій l или l'; слѣдовательно величина и направленіе перемѣщеній $\delta\sigma_2, \delta\sigma_3 \ldots \delta\sigma_n$ изъ этихъ уравненій опредѣлятся вполнѣ.



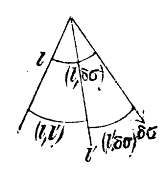


Рис. 59.

Прибавленіемъ упомянутыхъ точекъ $2', 3' \ldots n'$ мы не измѣнимъ условій равновѣсія системы; т. е. если перемѣщенія $\delta s_1 \ldots \delta s_n$ не могли быть произведены безъ точекъ $2' \ldots n'$, то они не будутъ произведены и съ этими точками. Точно также мы не измѣнимъ равновѣсія, если къ каждой парѣ точекъ 2 и $2'$, 3 и $3' \ldots n$ и n' приложимъ вдоль по линіямъ $l_2, l_3 \ldots l_n$ соотвѣтственно равныя и противоположныя силы $+P_2$ и $-P_2$, $+P_3$ и $-P_3, \cdots + P_n$ и $-P_n$. Затѣмъ выберемъ величины силъ $P_2, P_3 \ldots P_n$, приложенныхъ къ точкамъ $2, 3 \ldots n$, такъ, чтобы онѣ, слагаясь съ силами $F_2, F_3 \ldots F_n$, давали равнодѣйствующія, перпендикулярныя къ перемѣщеніямъ δs_2, $\delta s_3 \ldots \delta s_n$. Такой выборъ мы всегда можемъ сдѣлать, если линіи l_2, $l_3 \ldots l_n$ выбраны нами не въ направленіи силъ $F_2, F_3 \ldots F_n$. Въ противномъ же случаѣ силы P могутъ быть выбраны равными и противоположными силамъ F; т. е., какъ-бы ни были направлены линіи l относительно силъ F, мы выберемъ силы P такъ, чтобы равнодѣйствующія P и F не могли произвести перемѣщеній въ ту или другую сторону вдоль по линіямъ $\delta s_2, \delta s_3 \ldots \delta s_n$. Слѣдовательно сумма работъ соотвѣтствующихъ силъ P и F, при положительныхъ или отрицательныхъ перемѣщеніяхъ $\delta s_2 \ldots \delta s_n$, должна быть равна нулю; т. е.:

$$P_2 \cos(l_2, \delta s_2) \,.\, \delta s_2 + F_2 \cos(F_2, \delta s) \,.\, \delta s_2 = 0\,,$$
$$P_3 \cos(l_3, \delta s_3) \,.\, \delta s_3 + F_3 \cos(F_3, \delta s) \,.\, \delta s_3 = 0\,, \qquad (70)$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_n \cos(l_n, \delta s_3) \,.\, \delta s_n + F_n \cos(F_n, \delta s_n) \,.\, \delta s_n = 0\,,$$

при чемъ очевидно, всякіе углы $(P, \delta s)$ и $(l, \delta s)$ равны, ибо направленія P и l одинаковы по условію.

Теперь равновѣсіе силъ, вдоль по перемѣщенію δs_1, не будетъ уже обусловлено только силами, приложенными къ точкамъ $2, 3 \ldots n$, но и силами, приложенными къ точкамъ $2', 3' \ldots n'$. Другими словами, видъ условія (67) равновѣсія точки 1 для перемѣщенія δs_1 измѣнится: къ силамъ $f_2, f_3 \ldots f_n$, входящимъ въ это условіе, теперь прибавятся нѣкоторыя силы $p_2, p_3 \ldots p_n$, обусловливаемыя силами $P_2 \ldots, P_n$, и силы $p_2', p_3' \ldots p_n'$, обусловливаемыя силами $-P_2, -P_3, \ldots -P_n$. Такимъ образомъ условіе (67) можетъ быть замѣнено тождественнымъ съ нимъ условіемъ:

$$[F_1 \cos(F_1, \delta s_1) + f_2 \cos(f_2, \delta s_1) + \cdots f_n \cos(f_n, \delta s_1)$$
$$+ p_2 \cos(p_2, \delta s_1) + \cdots p_n \cos(p_n, \delta s_1) \qquad (71)$$
$$+ p_2' \cos(p_2', \delta s_1) + \cdots p_n' \cos(p_n', \delta s_1)]\, \delta s_1 \leqq 0\,.$$

Дѣйствительно, (71) отличается отъ (67) членами, которые равны нулю, ибо силы P и $-P$ сами по себѣ не могутъ произвести никакихъ перемѣщеній системы; а слѣдовательно возможная работа силъ p и p', ими обусловленныхъ, равна нулю. Но съ другой стороны, члены

$$[f_2 \cos(f_2, \delta s_1) + \cdots f_n \cos(f_n, \delta s_1)$$
$$+ p_2 \cos(p_2, \delta s_1) + \cdots p_n \cos(p_n, \delta s_1)]\, \delta s_1 \qquad (72)$$

выраженія (71) представляютъ теперь работу силъ, обусловливаемыхъ равнодѣйствующими всякихъ силъ P и F, приложенныхъ къ точкамъ $2, 3 \ldots n$; а такъ какъ эти равнодѣйствующія не могутъ произвести перемѣщеній вдоль $\delta s_2, \delta s_3 \ldots \delta s_n$, то слѣдовательно онѣ не могутъ обусловить перемѣщеній въ ту или другую сторону вдоль по δs_1; поэтому работа (72) должна быть равна нулю. Такимъ образомъ условіе равновѣсія точки 1, вдоль перемѣщенія δs_1, принимаетъ видъ:

$$[F_1 \cos(F_1, \delta s_1) + p_2' \cos(p_2', \delta s_1) + \cdots p_n' \cos(p_n', \delta s_1)]\, \delta s_1 \leqq 0\,; \qquad (73)$$

т. е. обусловливается только силами $F_1, -P_2, \ldots -P_n$.

Равновѣсіе системы не нарушится, если мы къ каждой парѣ точекъ, 1 и $2'$, 1 и $3' \ldots 1$ и n', приложимъ вдоль по линіямъ $l_2', l_3' \ldots l_n'$

соотвѣтственно равныя и противоположныя силы $+Q_2$ и $-Q_2$, $+Q_3$ и $-Q_3, \ldots +Q_n$ и $-Q_n$. Затѣмъ выберемъ силы $-Q_2, \ldots -Q_n$, приложенныя къ точкамъ $2', 3' \ldots n'$, такъ чтобы онѣ, слагаясь съ дѣйствующими уже тамъ силами $-P_2$, $-P_3, \ldots -P_n$, давали равнодѣйствующія, перпендикулярныя къ перемѣщеніямъ $\delta\sigma_2, \delta\sigma_3 \ldots \delta\sigma_n$, опредѣляемымъ уравненіями (68) и (69), т. е. такъ чтобы

$$\begin{aligned} &[-Q_2 \cos(l_2', \delta\sigma_2) - P_2 \cos(l_2, \delta\sigma_2)]\,\delta\sigma_2 = 0\,, \\ &[-Q_3 \cos(l_3', \delta\sigma_3) - P_3 \cos(l_3, \delta\sigma_3)]\,\delta\sigma_3 = 0\,, \qquad (74) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[-Q_n \cos(l_n', \delta\sigma_n) - P_n \cos(l_n, \delta\sigma_n)]\,\delta\sigma_n = 0\,. \end{aligned}$$

Называя черезъ $q_2, q_3 \ldots q_n$ такія силы, которыя, будучи приложены къ точкѣ 1, произведутъ такое же изъ ея возможныхъ перемѣщеній какъ то, которое обусловятъ силы $-Q_2 \ldots -Q_n$, мы можемъ замѣнить условіе равновѣсія (73) тождественнымъ съ нимъ условіемъ, прибавляя къ нему члены вида

$$\begin{aligned} &[Q_2 \cos(l_2', \delta s_1) + \cdots Q_n \cos(l_n', \delta s_1) \\ &+ q_2 \cos(q_2, \delta s_1) + \cdots q_n \cos(q_n, \delta s_1)]\,\delta s_1\,, \end{aligned}$$

которыя должны представлять работу силъ, обусловливаемыхъ всѣми вновь введенными силами $+Q$ и $-Q$, при чемъ эта работа очевидно должна быть равна нулю. Но работа всѣхъ силъ $-P$ и $-Q$, т. е.

$$\begin{aligned} &[p_2' \cos(p_2', \delta s_1) + \cdots p_n' \cos(p_n', \delta s) \\ &+ q_2 \cos(q_2, \delta s_1) + \cdots q_n \cos(q_n, \delta s)]\,\delta s_1 \end{aligned}$$

должна обращаться въ нуль на основаніи такихъ же соображеній, какъ и работа (72). Слѣдовательно, условіе (73) замѣнится условіемъ

$$[F_1 \cos(F_1, \delta s_1) + Q_2 \cos(l_2', \delta s_1) + \cdots Q_n \cos(l_n', \delta s_1)]\,\delta s_1 \overline{\lessgtr} 0\,, \qquad (75)$$

и будетъ теперь зависѣть только отъ силъ, непосредственно приложенныхъ къ точкѣ 1. Но, на основаніи (68) и (69), урр. (74) превращаются въ

$$\begin{aligned} &-Q_2 \cos(l_2', \delta s_1)\,\delta s_1 - P_2 \cos(l_2, \delta s_2)\,\delta s_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-Q_n \cos(l_n', \delta s_1)\,\delta s_1 - P_n \cos(l_n, \delta s_n)\,\delta s_n = 0\,. \end{aligned}$$

Складывая всѣ эти уравненія другъ съ другомъ и съ урр. (70), находимъ:

$$\begin{aligned} &[Q_2 \cos(l_2' \delta s_1) + \cdots Q_n \cos(l_n', \delta s_1)]\,\delta s_1 \\ &= F_2 \cos(F_2, \delta s_2)\,\delta s_2 + \cdots (F_n \cos F_n, \delta s_n)\,\delta s_n\,, \end{aligned}$$

вслѣдствіе чего условіе (75) превращается въ

$$F_1 \cos(F_1, \delta s_1)\, \delta s_1 + F_2 \cos(F_2, \delta s_2)\, \delta s_2 + \dots F_n \cos(F_n, \delta s_n)\, \delta s_n \overline{\underset{<}{=}} 0,$$

или (76)

$$\sum F \cos(F, \delta s). \delta s \overline{\underset{<}{=}} 0 .$$

Повторяя по очереди тѣже разсужденія, какъ выше, относительно условій равновѣсія точекъ 2, 3 ... n, при перемѣщеніяхъ δs_2, $\delta s_3 \dots \delta s_n$, мы очевидно прійдемъ каждый разъ къ одному и тому же условію (76). Точно также подобное же условіе будетъ получаться, если мы вмѣсто взаимно обусловливающихся перемѣщеній $\delta s_1 \dots \delta s_n$ возьмемъ рядъ другихъ совмѣстныхъ перемѣщеній $\delta s_1{}'$, $\delta s_2{}' \dots \delta s_n$ и т. д., при чемъ нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть совмѣстны только для нѣсколькихъ изъ точекъ системы и не зависѣть отъ всякихъ перемѣщеній другихъ точекъ. Однимъ словомъ, подъ величинами δs_1, $\delta s_2 \dots \delta s_n$ въ (76) мы можемъ поэтому разумѣть вообще всякія возможныя для системы одновременныя перемѣщенія, и общее условіе равновѣсія, выраженное въ (76), будетъ состоять такимъ образомъ въ томъ, чтобы сумма работъ взаимно уравновѣшивающихся силъ была равна нулю или отрицательна при всякихъ возможныхъ для системы перемѣщеніяхъ.

Условіе (76) можетъ быть представлено въ другомъ видѣ, съ помощію составляющихъ силъ и перемѣщеній по осямъ координатъ. Пусть X, Y, Z будутъ три составляющія по осямъ координатъ силы, приложенной къ одной изъ точекъ системы, и пусть δx, δy, δz будутъ проложенія на оси координатъ одного изъ возможныхъ перемѣщеній этой точки. Тогда очевидно, условіе (76) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\underset{<}{=}} 0, \tag{76}$$

гдѣ алгебраическая сумма берется по всѣмъ силамъ и по всѣмъ единовременно существующимъ перемѣщеніямъ системы.

Условіе равновѣсія мгновенныхъ силъ очевидно выразится тѣми же формулами (76). Обозначая черезъ t безконечно короткое время дѣйствія мгновенной силы F и черезъ J—величину ея импульса, мы имѣемъ:

$$F = \frac{J}{t},$$

причемъ величина t можетъ быть предположена какою угодно, если данъ только импульсъ J. Предполагая поэтому, что всѣ импульсы силъ, приложенныхъ къ точкамъ систеты, совершаются одновременно, и называя черезъ J_x, J_y, J_z ихъ слагающія по осямъ координатъ, мы можемъ представить условія равновѣсія импульсовъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum J\cos(J,\delta s)\,\delta s \overline{\underset{<}{=}} 0,$$

или

$$\sum (J_x\delta x + J_y\delta y + J_z\delta z) \overline{\underset{<}{=}} 0. \qquad (76)'$$

§ 29. Равновѣсіе веревочнаго многоугольника, какъ примѣръ общей теоріи равновѣсія.

Представимъ себѣ n матеріальныхъ точекъ, координаты которыхъ пусть будутъ $x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n$; первая изъ этихъ точекъ соединена со второю, 2-я съ 3-ю и т. д., n—1-ная съ n-ю гибкими, нерастяжимыми нитями $l_1, l_2 \ldots l_{n-1}$; къ каждой изъ точекъ соотвѣтственно приложены силы, слагающія которыхъ по осямъ координатъ суть $X_1, Y_1, Z_1, \ldots X_n, Y_n, Z_n$. Найдемъ соотношеніе между силами и направленіями линій $l_1, \ldots l_{n-1}$, соотвѣтствующія равновѣсію системы, и притомъ такъ, чтобы въ положеніи равновѣсія нити, соединяющія точки, были натянуты.

Начнемъ съ опредѣленія соотношеній между возможными перемѣщеніями данной системы. Разстоянія между послѣдовательными точками системы не могутъ быть больше $l_1, l_2 \ldots l_n$ по причинѣ нерастяжимости нитей; но могутъ быть менѣе этихъ величинъ по причинѣ сгибаемости нитей. Такъ какъ нити въ положеніи равновѣсія по условію натянуты, то разстояніе между 1 и 2 точками будетъ при этомъ l_1 и выразится съ помощію координатъ этихъ точекъ слѣдующимъ образомъ:

$$l_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Если точки, на концахъ линіи l_1, перемѣстятся на $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2 \ldots$, то разстояніе между этими точками измѣнится и будетъ $l_1 + \delta l_1$, при чемъ

$$(l_1 + \delta l_1)^2 = (x_2 + \delta x_2 - x_1 - \delta x_1)^2 + (y_2 + \delta y_2 - y_1 - \delta y_1)^2 + (z_2 + \delta z_2 - z_1 - \delta z_1)^2.$$

Вычтемъ предыдущія равенства другъ изъ друга, и отбросимъ квадраты и произведенія безконечно малыхъ перемѣщеній, такъ какъ они будутъ очевидно безконечно меньше первыхъ степеней тѣхъ-же величинъ. Тогда получимъ:

$$l_1\delta l_1 = (x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) + (z_2 - z_1)(\delta z_2 - \delta z_1)\,, \tag{77}$$

или такъ какъ $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ суть проложенія линіи l_1 на оси координатъ, то называя черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ углы этой линіи съ осями координатъ, имѣемъ:

$$x_2 - x_1 = l_1 \cos\alpha_1\,, \quad y_2 - y_1 = l_1 \cos\beta_1\,, \quad z_2 - z_1 = l_1 \cos\gamma_1\,,$$

вслѣдствіе чего (77) обращается въ

$$\delta l_1 = (\delta x_2 - \delta x_1)\cos\alpha_1 + (\delta y_2 - \delta y_1)\cos\beta_1 + (\delta z_2 - \delta z_1)\cos\gamma_1\,. \tag{78}$$

Точно также найдемъ для перемѣщеній концовъ остальныхъ нитей:

$$\delta l_2 = (\delta x_3 - \delta x_2)\cos\alpha_2 + (\delta y_3 - \delta y_2)\cos\beta_2 + (\delta z_3 - \delta z_2)\cos\gamma_2\,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\delta l_{n-1} = (\delta x_n - \delta x_{n-1})\cos\alpha_{n-1} + (\delta y_n - \delta y_{n-1})\cos\beta_{n-1} + (\delta z_n - \delta z_{n-1})\cos\gamma_{n-1}\,, \tag{78}$$

при чемъ величины $\delta l_1 \ldots \delta l_{n-1}$, совершенно независимы другъ отъ друга, но должны быть всѣ отрицательны или нули, ибо разстоянія послѣдовательныхъ точекъ могутъ только уменьшаться или оставаться неизмѣнными, но не увеличиваться. Число уравненій (78), опредѣляющихъ соотношенія между $3n$ совмѣстно возможными перемѣщеніями точекъ системы, будетъ $n-1$; слѣдовательно съ ихъ помощію мы опредѣлимъ $n-1$ перемѣщеній черезъ другія $2n+1$, которыя останутся совершенно произвольными. Такимъ образомъ въ условіе равновѣсія (76) войдутъ только $2n+1$ изъ числа $3n$ совмѣстно возможныхъ перемѣщеній. Исключеніе перемѣщеній изъ (76) съ помощію (78) произведемъ слѣдующимъ путемъ. Каждое изъ урр. (78) умножимъ соотвѣтственно на неопредѣленные множители $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ и сложимъ съ (76); тогда получимъ:

$$\begin{aligned}
&\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\\
&+ \lambda_1(\delta x_2 - \delta x_1)\cos\alpha_1 + \lambda_1(\delta y_2 - \delta y_1)\cos\beta_1 + \lambda_1(\delta z_2 - \delta z_1)\cos\gamma_1\\
&+ \cdots\cdots\\
&+ \lambda_{n-1}(\delta x_n - \delta x_{n-1})\cos\alpha_{n-1} + \lambda_{n-1}(\delta y_n - \delta y_{n-1})\cos\beta_{n-1}\\
&\qquad + \lambda_{n-1}(\delta z_n - \delta z_{n-1})\cos\gamma_{n-1}\\
&\qquad \overline{\underline{<}}\; \lambda_1\delta l_1 + \cdots \lambda_{n-1}\delta l_{n-1}\,;
\end{aligned} \tag{79}$$

при этомъ множители $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ опредѣлимъ такъ, чтобы коэффиціенты при $(n-1)$ перемѣщеніяхъ $\delta x, \delta y, \delta z \ldots$ обращались въ нули. Такимъ образомъ въ (79) останутся только $2n+1$ совершенно произвольныхъ перемѣщеній, при чемъ неравенство (79) только тогда удовлетворится, когда коэффиціенты при этихъ произвольныхъ величинахъ будутъ нулями. Итакъ, приходимъ къ заключенію, что вообще коэффиціенты у всѣхъ $3n$ перемѣщеній въ выраженіи (79) должны быть нули, вслѣдствіе чего само это неравенство распадается на $3n$ слѣдующихъ равенствъ:

$$\begin{aligned} &X_1 - \lambda_1 \cos\alpha_1 = 0\,, \\ &X_2 + \lambda_1 \cos\alpha_1 - \lambda_2 \cos\alpha_2 = 0\,, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &X_n + \lambda_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} &Y_1 - \lambda_1 \cos\beta_1 = 0\,, \\ &Y_2 + \lambda_1 \cos\beta_1 - \lambda_2 \cos\beta_2 = 0\,. \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &Y_n + \lambda_{n-1} \cos\beta_{n-1} = 0\,. \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} &Z_1 - \lambda_1 \cos\gamma_1 = 0\,, \\ &Z_2 + \lambda_1 \cos\gamma_1 - \lambda_2 \cos\gamma_2 = 0\,, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &Z_n + \lambda_{n-1} \cos\gamma_{n-1} = 0\,, \end{aligned} \tag{82}$$

при чемъ кромѣ того отъ (79) останется неравенство

$$\lambda_1 \delta l_1 + \lambda_2 \delta l_2 + \ldots \lambda_{n-1} \delta l_{n-1} \overline{\leq} 0\,, \tag{83}$$

которое удовлетворится только тогда, когда всѣ λ опредѣлятся отрицательными, ибо при произвольной отрицательной величинѣ одной изъ δl остальныя могутъ быть нулями. Слѣдовательно, если при данныхъ силахъ условіе (83) не удовлетворено, то равновѣсіе не возможно.

Предыдущія уравненія и неравенство прежде всего показываютъ, что равновѣсіе, при данныхъ силахъ и направленіяхъ нитей, не зависитъ отъ длины этихъ послѣднихъ. Затѣмъ, если намъ дано заранѣе распредѣленіе нитей, т. е. даны всѣ углы α, β, γ, то мы по урр. (80)—(82) опредѣлимъ соотношенія между слѣдующими величинами: между $3n$ составляющими силами X, Y, Z и между $n-1$ множителями λ, т. е. между $4n-1$ неизвѣстными; а такъ какъ число уравненій есть $3n$, то слѣдовательно при этомъ $n-1$ составляющихъ

останутся совершенно произвольными, и будутъ удовлетворять условію равновѣсія, лишь-бы существовало неравенство (83), т. е. всѣ λ были-бы отрицательными. Если даны всѣ силы, то неизвѣстными остаются $n-1$ множителей λ и $3(n-1)$ косинусовъ угловъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}$, т. е. $4n-4$ величинъ. Но каждые три косинуса угловъ одной и той же линіи съ осями координатъ связаны уравненіями вида

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,,$$

число которыхъ въ данномъ случаѣ будетъ очевидно $n-1$. Такимъ образомъ для опредѣленія $4n-4$ неизвѣстныхъ будемъ имѣть $4n-1$ уравненій и одно неравенство, т. е. большее число уравненій, нежели неизвѣстныхъ. Отсюда видимъ, что не при всякихъ произвольно данныхъ силахъ возможно равновѣсіе разсматриваемой системы.

Уравненія (80)—(82) можемъ представить въ другомъ, механически болѣе понятномъ видѣ, написавъ сперва три первыя урр. трехъ группъ (80)—(82), за тѣмъ—суммы двухъ первыхъ, трехъ первыхъ и т. д. до суммъ всѣхъ n уравненія каждой группы. Тогда получимъ n тройныхъ группъ такихъ уравненій:

$$\begin{aligned}
1)\quad & X_1 - \lambda_1 \cos\alpha_1 = 0\,, \\
& Y_1 - \lambda_1 \cos\beta_1 = 0\,, \qquad\qquad (84) \\
& Z_1 - \lambda_1 \cos\gamma_1 = 0\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & X_1 + X_2 - \lambda_2 \cos\alpha_2 = 0\,, \\
& Y_1 + Y_2 - \lambda_2 \cos\beta_2 = 0\,, \\
& Z_1 + Z_2 - \lambda_2 \cos\gamma_2 = 0\,. \\
& \ldots\ldots\ldots \\
n-1)\quad & X_1 + X_2 + \ldots X_{n-1} - \lambda_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = 0\,, \\
& Y_1 + Y_2 + \ldots Y_{n-1} - \lambda_{n-1} \cos\beta_{n-1} = 0\,, \\
& Z_1 + Z_2 + \ldots Y_{n-1} - \lambda_{n-1} \cos\gamma_{n-1} = 0\,. \qquad (84) \\
n)\quad & X_1 + X_2 + \ldots X_n = 0\,, \\
& Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n = 0\,, \\
& Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n = 0\,.
\end{aligned}$$

Уравненія группы 1) даютъ:

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = \lambda_1^2,$$

откуда, такъ какъ λ_1 должно быть отрицательно:

$$\lambda_1 = -\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = -R_1\,, \qquad (85)$$

гдѣ R_1 представляетъ величину равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ 1-й точкѣ. Такъ какъ далѣе

$$X_1 = R_1 \cos(R_1,x)\,, \qquad Y_1 = R_1 \cos(R_1,y)\,, \qquad Z_1 = R_1 \cos(R_1,z)\,,$$

гдѣ $(R_1,x)\ldots$ представляютъ углы R_1 съ осями координатъ, то уравненія группы 1) превращаются въ

$$\cos\alpha_1 = -\cos(R_1,x)\,, \qquad \cos\beta_1 = -\cos(R_1,y)\,,$$
$$\cos\gamma_1 = -\cos(R_1,z)\,, \qquad (86)$$

откуда заключаемъ, что первая нить должна быть направлена отъ первой точки противоположно силѣ R_1, приложенной къ этой послѣдней. Точно также вторая группа даетъ намъ:

$$\lambda_2 = -\sqrt{(X_1+X_2)^2 + (Y_1+Y_2)^2 + (Z_1+Z_2)^2} = -R_2\,, \qquad (87)$$

гдѣ R_2 есть величина геометрической суммы (но не самая сумма, которая имѣетъ кромѣ величины направленіе) силъ, приложенныхъ къ 1-й и 2-й точкамъ, и такъ какъ далѣе

$$X_1 + X_2 = R_2 \cos(R_2,x) \quad \text{и т. п.,}$$

то группа 2) даетъ

$$\cos\alpha_2 = -\cos(R_2,x)\,, \qquad \cos\beta_2 = -\cos(R_2,y)\,, \quad \text{и т. д.,} \qquad (88)$$

откуда заключаемъ, что вторая нить должна быть направлена отъ 2-й точки противоположно геометрической суммѣ силъ, приложенныхъ къ этой послѣдней точкѣ и къ предыдущей. Наконецъ точно также изъ $n-1$) группы уравненій (84) выведемъ, что послѣдняя $n-1$-ная нить должна быть направлена отъ $n-1$-ной точки противоположно геометрической суммѣ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ и ко всѣмъ предыдущимъ. Послѣдняя группа n) уравн. (84) показываетъ, что геометрическая сумма всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ разсматриваемой системы, должна быть равна нулю. Кромѣ того изъ уравненій (80)—(82) легко видѣть, что приложенныя силы должны также удовлетворять условіямъ

$$\Sigma(Yz - Zy) = 0\,, \qquad \Sigma(Zx - Xz) = 0\,, \qquad \Sigma(Xy - Yx) = 0\,, \qquad (89)$$

которыя вмѣстѣ съ условіями n), т. е.

$$\Sigma X = 0\,, \qquad \Sigma Y = 0\,, \qquad \Sigma Z = 0\,, \qquad (90)$$

показываютъ, что приложенныя силы должны имѣть свойства взаимныхъ силъ.

§ 30. Общее условіе движенія системы. Принципъ д'Аламбера.

Если матеріальная точка свободна, то всякая сила къ ней приложенная обусловитъ извѣстное измѣненіе ея движенія. Но если точка не свободна и сила, къ ней приложенная, направлена во все время движенія только въ сторону невозможнаго для точки перемѣщенія, то такая сила не измѣнитъ очевидно движенія точки въ сказанномъ направленіи, ибо въ каждый моментъ движенія она будетъ удовлетворять условіямъ равновѣсія; самое же движеніе будетъ обусловлено мгновеннымъ или непрерывнымъ дѣйствіемъ какихъ либо другихъ силъ, направленныхъ въ сторону возможныхъ перемѣщеній точки. Такимъ образомъ, если нѣкоторая сила F приложена къ данной несвободной движущейся матеріальной точкѣ, то вообще одна изъ двухъ слагающихъ, на которыя мы можемъ разложить эту силу, будетъ въ каждый моментъ движенія уравновѣшена условіями, ограничивающими свободу движенія точки, а другая будетъ совпадать съ однимъ изъ возможныхъ перемѣщеній точки и обусловливать приращеніе скорости (геометрическое) по упомянутому направленію; эта послѣдняя слагающая данной силы F носитъ названіе ускорительной силы по той причинѣ, что она именно обусловливаетъ измѣненіе движенія тѣла. Зная массу m движущейся точки и предполагая извѣстнымъ ея ускореніе g, мы опредѣлимъ величину ускорительной силы, какъ произведеніе mg. При этомъ геометрическая разность

$$F \sim mg$$

представитъ очевидно другую слагающую силы F, не обусловливающую измѣненія движенія; эта послѣдняя называется потерянною силою. Предыдущія соображенія приводятъ насъ къ тому заключенію, что потерянныя силы во все время движенія ихъ точекъ приложенія остаются въ равновѣсіи. Этимъ заключеніемъ формулируется принципъ д'Аламбера.

То что было сказано объ одной движущейся точкѣ, прилагается безъ измѣненія къ цѣлой системѣ точекъ. Именно, каждую изъ силъ $F_1, F_2 \dots F_n$, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ системы, мы можемъ разложить на двѣ слагающихъ. Однѣ изъ этихъ слагающихъ

взаимно уравновѣшиваются въ каждый моментъ движенія; другія производятъ измѣненіе движенія системы. При этомъ условія движенія системы могутъ слѣдовательно быть сведены къ условіямъ равновѣсія потерянныхъ силъ. Итакъ, если мы черезъ $m_1, m_2 \ldots m_n$ обозначимъ массы точекъ системы, черезъ $g_1, g_2 \ldots g_n$—ихъ ускоренія, черезъ $\delta s_1, \delta s_2 \ldots \delta s_n$—какія нибудь совмѣстно существующія возможныя перемѣщенія, черезъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$—углы этихъ перемѣщеній съ потерянными силами, то условія движенія системы, подъ дѣйствіемъ силъ $F_1, F_2 \ldots F_n$, выразятся, на основаніи принципа д'Аламбера, слѣдующимъ образомъ:

$$(F_1 \sim m_1 g_1)\cos\alpha_1\,\delta s_1 + (F_2 \sim m_2 g_2)\cos_2\delta s_2 + \cdots (F_n \sim m_n g_n)\cos\alpha_n\,\delta s_n \overline{\overline{<}}\, 0\,, \tag{91}$$

или вообще:

$$\sum (F \sim mg)\cos\alpha\,\delta s \overline{\overline{<}}\, 0\,; \tag{92}$$

но такъ какъ проложеніе равнодѣйствующей равно алгебраической суммѣ проложеній слагающихъ, то выше приведенное условіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\sum [F\cos(F,\delta s) - mg\cos(g,\delta s)]\,\delta s \overline{\overline{<}}\, 0\,, \tag{92$'$}$$

при чемъ алгебраическая сумма берется по всѣмъ совмѣстно существующимъ возможнымъ элементарнымъ работамъ, и условіе имѣетъ мѣсто для каждаго момента времени движенія. Вводя проложенія на оси координатъ силъ, ускореній и перемѣщеній, мы можемъ условіе (92) представить въ видѣ:

$$\sum [(X - mg_x)\,\delta x + (Y - mg_y)\,\delta y + (Z - mg_z)\,\delta z] \overline{\overline{<}}\, 0\,. \tag{93}$$

Въ случаѣ одной точки, знакъ суммы въ выраженіяхъ (92) и (93) очевидно не имѣетъ мѣста.

Если приложенныя силы суть мгновенныя, которыхъ импульсы даны, то въ такомъ случаѣ мы можемъ предположить, что продолжительность дѣйствія для всѣхъ силъ одна и таже t, ибо, при данномъ импульсѣ J, величина силы и время ея дѣйствія остаются произвольными, лишь-бы произведеніе изъ нихъ было равно J. Въ та-

комъ случаѣ условіе (92) обращается въ

$$\sum\left(\frac{J}{t} \sim mg\right) \cos\alpha\, \delta s \overline{\underset{<}{=}} 0$$

или обозначая черезъ $V \sim V_0$ обусловливаемое импульсомъ геометрическое приращеніе скорости:

$$\sum[J \sim m(V \sim V_0)] \cos\alpha\, \delta s \overline{\underset{<}{=}} 0,$$

ибо $gt = V \sim V_0$. Точно также условіе (93) принимаетъ видъ:

$$\sum\Big\{[J_x - m(u - u_0)]\,\delta x + [J_y - m(v - v_0)]\,\delta y \\ + [J_z - m(w - w_0)]\,\delta z\Big\} \overline{\underset{<}{=}} 0, \qquad (93)'$$

гдѣ u, v, w суть слагающія скорости по tremъ осямъ координатъ.

Если, во все время движенія, точки остаются совершенно свободными, то всякія ихъ возможныя перемѣщенія совершенно независимы другъ отъ друга и произвольны. Въ такомъ случаѣ условія (93) или (92) только тогда могутъ оправдаться, когда каждый изъ множителей при произвольныхъ величинахъ $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta y_1, \delta y_2 \ldots$ обращается въ нуль, т. е. когда

$$\begin{aligned} X_1 &= m_1 g_{x1}, \quad Y_1 = m_1 g_{y1}, \ldots \\ X_2 &= m_2 g_{x2}, \quad \text{и т. д.}; \end{aligned} \qquad (94)$$

т. е. въ такомъ случаѣ приложенныя силы измѣряются произведеніями изъ массъ и ускореній, ибо эти ускоренія данными силами вполнѣ обусловливаются. Въ случаѣ связной системы, равенства (94) очевидно вообще не будутъ уже имѣть мѣста.

Если силы, приложенныя къ точкамъ системы, во все время ея движенія взаимно уравновѣшиваются, то для каждаго момента движенія должно существовать условіе

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\underset{<}{=}} 0, \qquad (95)$$

вслѣдствіе чего условіе движенія (93) принимаетъ видъ

$$\sum m(g_x \delta x + g_y \delta y + g_z \delta z) \overline{\underset{>}{=}} \delta\nu, \qquad (96)$$

гдѣ $\delta\nu$ представляетъ ту величину, отрицательную или нуль, въ которую обращается выраженіе (95). Если точки системы совершенно

свободны, то, при совершенной произвольности возможныхъ перемѣщеній, условіе (96) имѣетъ слѣдствіемъ то, что всѣ ускоренія должны быть въ данномъ случаѣ равны нулю, и движенія всѣхъ точекъ системы—прямолинейныя и равномѣрныя. Но если точки системы не свободны, то вообще для удовлетворенія условію (96) нѣтъ необходимости, чтобы всѣ ускоренія были равны нулю, ибо тогда перемѣщенія $\delta x, \delta y \ldots$ не будутъ уже вполнѣ другъ отъ друга независимы. Такимъ образомъ движеніе связной системы, подъ дѣйствіемъ взаимно уравновѣшивающихся силъ, или вовсе безъ дѣйствія силъ, не исключаетъ возможности измѣненія движенія каждой отдѣльной точки системы, а слѣдовательно—и существованія ускорительныхъ силъ. Примѣры такого рода дѣйствія однѣхъ только ускорительныхъ силъ мы видимъ при равномѣрномъ движеніи точки по какой нибудь кривой линіи, съ которой она неразрывно сзязана, въ равномѣрномъ вращеніи твердаго тѣла около неподвижной оси, и т. п. Дѣйствительно, въ томъ и другомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ точкою или точками, движущимися равномѣрно по кривымъ линіямъ; ускореніе въ такомъ случаѣ должно существовать, ибо направленіе скоростей измѣняется; въ § 8 мы видѣли, что это ускореніе (нормальное) должно быть перпендикулярно къ направленію пути и направлено по радіусамъ соприкасающихся круговъ, къ центрамъ этихъ послѣднихъ; направленіе силы, обусловливающей это ускореніе, съ нимъ совпадаетъ. Но съ другой стороны, кривая линія въ первомъ примѣрѣ, и круги, плоскости которыхъ перпендикулярны къ неподвижной оси, во второмъ примѣрѣ, представляютъ собою единственно возможныя перемѣщенія для движущихся по нимъ точекъ; слѣдовательно, если мы представимъ себѣ силы, которыя, обусловливая вышеупомянутыя нормальныя ускоренія, будутъ въ каждый моментъ движенія перпендикулярны къ направленію единственно возможнаго движенія, то такія силы всегда будутъ удовлетворять условію равновѣсія.

Причина того кажущагося парадокса, что одинъ разъ, принимая условіе (95), мы тѣмъ полагаемъ, что приложенныя силы взаимно уравновѣшиваются и не производятъ слѣдовательно измѣненія движенія, а затѣмъ условіемъ (96) допускаемъ, что на точки системы тѣмъ не менѣе дѣйствуютъ ускорительныя силы, заключается въ слѣдующемъ. Введя понятіе о силѣ, какъ о причинѣ измѣняющей движеніе, мы говоримъ, что это измѣненіе можетъ еще происходить вслѣдствіе условій связности системы; такъ напримѣръ, точка должна

двигаться по кругу, если существуетъ сила, направленная къ его центру и скорость, перпендикулярная къ радіусу; но эта точка должна также двигаться не иначе, какъ по кругу, если она неизмѣнно соединена съ его центромъ; или еще: сила, приложенная къ данной точкѣ, съ одной стороны, будетъ всегда уравновѣшена другою, ей прямо противоположною и равною, а съ другой стороны, таже сила можетъ также уравновѣситься нѣкоторымъ препятствіемъ, если точка не можетъ оставить поверхности, перпендикулярной къ упомянутой силѣ. Поэтому условія связности системы мы должны разсматривать, какъ нѣкоторыя силы, приложенныя къ точкамъ системы и измѣняющія первоначально сообщенныя скорости или уравновѣшивающія другія данныя силы. Слѣдовательно, если мы говоримъ, что силы, приложенныя къ точкамъ связной системы, во время ея движенія равны нулю, то тѣмъ самымъ не исключаемъ возможности существованія другихъ силъ, обусловливаемыхъ связностію системы.

Условія (93) позволяютъ найти соотношенія (рядъ уравненій) между данными силами, данными отношеніями возможныхъ перемѣщеній другъ къ другу и искомыми ускореніями. Это распаденіе условій (63) на рядъ уравненій движенія совершается подобнымъ же образомъ, какъ въ случаѣ равновѣсія, разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ параграфѣ. Найдя такимъ образомъ ускоренія, мы опредѣляемъ по нимъ движеніе точекъ системы съ помощію суммованій, смыслъ которыхъ былъ разъясненъ въ § 10 и § 11, но производить которыя учитъ насъ Интенгральное Исчисленіе. Полнымъ изслѣдованіемъ всѣхъ слѣдствій, вытекающихъ изъ условій (63), занимается Аналитическая Механика. Мы ограничимся выводомъ изъ нихъ нѣкоторыхъ общихъ свойствъ движенія системы.

---

§ 31. Измѣненія количества движенія и его момента, отнесенныя къ единицѣ времени.

Предположимъ, что данная система, кромѣ всякихъ другихъ возможныхъ для ея точекъ перемѣщеній, можетъ передвигаться всѣми своими точками одинаково по всѣмъ направленіямъ. Въ этомъ случаѣ между возможными совмѣстными перемѣщеніями $\delta x, \delta y \ldots$ точекъ системы найдутся такія, при которыхъ всѣ δx будутъ для каждой изъ точекъ одинаковы, и равны, положимъ, δa; точно также всѣ

$\delta y = \delta b$, всѣ $\delta z = \delta c$. Условіе (93) для такихъ перемѣщеній обращается въ

$$\delta a \Sigma (X - mg_x) + \delta b \Sigma (Y - mg_y) + \delta c \Sigma (Z - mg_z) \overline{\overline{<}} 0. \tag{97}$$

Давая величинамъ δa, δb, δc различныя произвольныя безконечно малыя положительныя или отрицательныя значенія, мы будемъ получать проложенія на оси координатъ различныхъ произвольныхъ перемѣщеній точекъ системы по различнымъ направленіямъ, но одинаковыхъ для всѣхъ точекъ. Если такія перемѣщенія для системы возможны, то, вслѣдствіе совершенной произвольности величинъ δa, δb и δc, условіе (97) можетъ только тогда быть вполнѣ удовлетворено, когда каждый изъ множителей при упомянутыхъ трехъ произвольныхъ величинахъ будетъ равенъ нулю, т. е. когда

$$\Sigma mg_x = \Sigma X, \quad \Sigma mg_y = \Sigma Y, \quad \Sigma mg_z = \Sigma Z. \tag{98}$$

Но, на основаніи § 7, (16), мы имѣемъ вообще:

$$\Sigma mg_x = \Sigma m \frac{dv_x}{dt} \quad \text{и т. п.,}$$

или такъ какъ сумма приращеній равна очевидно приращенію суммы, то

$$\Sigma mg_x = \frac{d\Sigma mv_x}{dt} \quad \text{и т. п.,}$$

гдѣ приращеніе берется алгебраическое, какъ было объяснено въ § 7. Такимъ образомъ урр. (98) превращаются въ

$$\frac{d\Sigma mv_x}{dt} = \Sigma X, \quad \frac{d\Sigma mv_y}{dt} = \Sigma Y, \quad \frac{d\Sigma mv_z}{dt} = \Sigma Z, \tag{99}$$

гдѣ лѣвыя части выражаютъ очевидно алгебраическія приращенія слагающихъ количества движенія системы по осямъ координатъ, отнесенныя къ единицѣ времени, или короче—измѣненія упомянутыхъ слагающихъ со временемъ. Три уравненія (99) очевидно выражаютъ тоже самое, что уравн. (51), (§ 25). Дѣйствительно, это послѣднее уравненіе мы получаемъ непосредственно, складывая геометрически урр. (99). При этомъ геометрическая сумма трехъ слагающихъ $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ представитъ очевидно геометрическую сумму всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы; т. е.

$$\Sigma X + \Sigma Y + \Sigma Z = \Sigma F;$$

точно также геометрическая сумма трехъ измѣненій составляющихъ количества движенія представитъ измѣненіе самаго количества движенія, т. е. геометрической суммы Σmv. Такимъ образомъ мы получимъ:

$$\frac{\Delta \Sigma mv}{dt} = \Sigma F, \tag{100}$$

гдѣ суммы и ихъ приращенія берутся геометрически. Изъ ур. (100) выводимъ тѣже самыя заключенія для данной связной системы, какъ и изъ ур. (51)—для сводобной консервативной.

Предположимъ еще, что данная система, кромѣ своихъ прочихъ возможныхъ перемѣщеній, можетъ еще всѣми своими точками вращаться безконечно мало около всякой произвольно выбранной оси. Пусть $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ будутъ три произвольныя вращенія около трехъ осей координатъ; тогда, на основаніи § 13, мы знаемъ, что, придавая этимъ величинамъ произвольныя положительныя или отрицательныя значенія, мы можемъ съ помощію ихъ представить всевозможныя вращенія около всевозможныхъ осей. Если p, q, r будутъ какія-либо произвольныя угловыя скорости, съ которыми нроизведены вращенія $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, въ теченіи элемента времени dt, то очевидно, что

$$\delta\alpha = pdt, \quad \delta\beta = qdt, \quad \delta\gamma = rdt;$$

если u, v, w будутъ при этомъ скорости точки (x, y, z) системы, то перемѣщенія δx, δy, δz этой точки будутъ очевидно

$$\delta x = udt, \quad \delta y = vdt, \quad \delta z = wdt.$$

На основаніи этихъ соображеній, помножая обѣ части урр. (80) (§ 13) на dt, мы находимъ слѣдующее выраженіе для совмѣстныхъ перемѣщеній точекъ системы при ея вращеніи на $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$:

$$\begin{aligned} \delta x &= y\delta\gamma - z\delta\beta, \\ \delta y &= z\delta\alpha - x\delta\gamma, \\ \delta z &= x\delta\beta - y\delta\alpha. \end{aligned} \tag{101}$$

Въ этихъ уравненіяхъ множители x, y, z будутъ различны для различныхъ точекъ системы, множители же $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$—одинаковы. Подставляя перемѣщенія (101) въ условіе (93) и приравнивая нулю множители при произвольныхъ величинахъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, мы получаемъ:

$$\sum m\,(zg_y - yg_z) = \sum (Yz - Zy)\,,$$

$$\sum m\,(xg_z - zg_x) = \sum (Zx - Xz)\,, \qquad (102)$$

$$\sum m\,(yg_x - xg_y) = \sum (Xy - Yx)\,.$$

Сравнивая эти уравненія съ выраженіями (38) (§ 23) слагающихъ моментовъ по осямъ координатъ, мы находимъ, что лѣвыя части (102) представляютъ слагающіе моменты измѣненія количества движенія по осямъ координатъ, а правыя—моменты приложенныхъ силъ. Написавъ лѣвыя части (102) въ видѣ

$$\frac{\sum [z\,d(mv_y) - y\,d(mv_z)]}{dt}\,, \quad \text{и т. д.}$$

гдѣ символъ d обозначаетъ безконечно малое алгебраическое приращеніе, въ теченіи элемента времени dt, мы найдемъ, что числители этихъ выраженій представятъ слагающіе моменты приращеній количества движенія. Но моментъ приращенія вектора равенъ приращенію момента того-же вектора (§ 24, (47)); слѣдовательно:

$$\frac{\sum [z\,d(mv_y) - y\,d(mv_z)}{dt} = \frac{d\sum (zmv_y - ymv_z)}{dt} \qquad (103)$$

и т. д. Складывая геометрически правыя и лѣвыя части выраженій (102), и обозначая черезъ ∂ длину перпендикуляра изъ начала координатъ на направленіе соотвѣтствующаго ускоренія g (геометрической суммы $g_x + g_y + g_z$), а черезъ $\mathfrak{d}$—длину перпендикуляра изъ начала на направленіе приложенной силы F (геометрической суммы $X + Y + Z$), мы находимъ:

$$\sum mg.\partial = \sum F\,\mathfrak{d}\,, \qquad (104)$$

выраженіе тождественное съ (55) (§ 25), при чемъ обѣ суммы Σ берутся геометрически. Обозначая затѣмъ черезъ δ длину перпендикуляра изъ начала координатъ на направленіе скорости v (геометрической суммы $v_x + v_y + v_z$), и помня, что

$$\Delta \sum mv.\delta = \sum (mg.\partial)\,dt\,,$$

гдѣ символъ Δ обозначаетъ геометрическое приращеніе, мы получаемъ изъ (104):

$$\frac{\Delta\sum mv.\delta}{dt}=\sum F.\mathfrak{d}\,; \tag{105}$$

т. е., въ случаѣ существованія упомянутыхъ возможныхъ перемѣщеній, приращеніе (геометрическое) момента количествъ движенія системы измѣряется моментомъ приложенныхъ силъ.

Слѣдовательно вообще: если для точекъ связной системы существуетъ возможность одновременныхъ произвольныхъ, но одинаковыхъ для всѣхъ точекъ, поступательныхъ перемѣщеній и вращеній, то приложенныя силы производятъ въ системѣ такое-же измѣненіе количества движенія и его момента, какъ во всякой свободной консервативной системѣ; т. е. одна и таже геометрическая сумма приложенныхъ силъ обусловитъ одно и тоже измѣненіе количества движенія, къ какой-бы системѣ силы, составляющія эту данную геометрическую сумму, ни были приложены, лишь-бы упомянутая система могла всѣми своими точками одинаково поступательно перемѣщаться; точно также одинъ и тотъ-же моментъ силъ всегда произведетъ одинаковое измѣненіе момента количества движенія системы, какова-бы она ни была, лишь-бы ея точки могли одновременно вращаться около произвольно выбранныхъ осей.

§ 32. Центростремительная и центробѣжная силы.

Мы уже видѣли въ § 7 и § 8, что ускореніе всякаго криволинейнаго движенія можетъ быть разложено на два слагающихъ ускоренія, изъ которыхъ одно всегда совпадаетъ съ направленіемъ движенія, а другое ему перпендикулярно и направлено къ центру соприкасающагося круга; первое есть тангенціальное ускореніе, второе—центростремительное. Сообразно съ этимъ, всякая сила, обусловливающая криволинейное движеніе матеріальной точки, разлагается на двѣ—тангенціальную и центростремительную. При прямолинейномъ движеніи свободной матеріальной точки, можетъ дѣйствовать только одна тангенціальная сила; при равномѣр-

номъ криволинейномъ—одна центростремительная, величина которой вообще различна для каждаго элемента криволинейнаго пути, и остается постоянною, только если путь круговой. Если точка не свободна, то мы можемъ представить себѣ ея движеніе криволинейнымъ, безъ дѣйствія какой либо приложенной силы, при чемъ измѣненіе направленія пути будетъ происходить вслѣдствіе условія несвободы точки, а самое движеніе можетъ быть слѣдствіемъ скорости, сообщенной точкѣ на первомъ элементѣ ея пути. Примѣръ такого рода движенія представитъ точка, вращающаяся равномѣрно около центра, съ которымъ она связана нерастяжимою нитью, или точка, движущаяся равномѣрно по изогнутой проволокѣ, которую она не можетъ оставить, или точка, движущаяся внутри криваго канала, и т. п. Во всѣхъ этихъ движеніяхъ несвободной точки существуетъ центростремительное ускореніе, а слѣдовательно должна существовать и центростремительная сила. Если эта послѣдняя не дана, какъ нѣкоторая извѣстная сила, обусловленная извѣстными другими дѣйствующими массами, то мы должны источникъ ея искать въ тѣхъ матеріальныхъ препятствіяхъ, которыя ограничиваютъ въ данномъ случаѣ свободу движенія точки. Поэтому мы говоримъ, что нить тянетъ матеріальную точку къ центру, или каждый элементъ проволоки или канала, по которымъ проходитъ точка, толкаетъ ее къ центру соприкасающагося круга. Но если какая нибудь матеріальная система своимъ присутствіемъ обусловливаетъ какія либо силы на другую систему или точку, то эта послѣдняя, по третьему закону Ньютона, должна дѣйствовать на первую съ силами равными и противоположными. Слѣдовательно, если въ данномъ случаѣ матеріальныя препятствія обусловливаютъ дѣйствіе на несвободную точку центростремительной силы, то и сама движущаяся матеріальная точка должна дѣйствовать на эти препятствія съ силою, равною и противоположною центростремительной; такая сила называется *центробѣжною*. Другими словами, если нить тянетъ матеріальную точку къ центру или если каждый элементъ проволоки толкаетъ эту точку къ центру, то и сама движущаяся точка обратно натягиваетъ нить и обратно толкаетъ элементъ проволоки прочь отъ центра. Что такая центробѣжная сила дѣйствительно существуетъ, мы видимъ изъ того, что съ увеличеніемъ скорости, квадрату которой эта сила должна быть пропорціональна, нить обрывается и проволока ломается. Кромѣ давленія на матеріальныя преграды, обусловленнаго центробѣжною силою,

можетъ еще очевидно существовать давленіе, обусловленное какою либо приложенною силою, если эта послѣдняя, или часть ея, дѣйствуетъ въ направленіи невозможныхъ перемѣщеній.

Къ тѣмъ же самымъ выводамъ относительно существованія и значенія центробѣжной силы мы прійдемъ, если будемъ разыскивать для несвободной точки величину потерянной силы, удовлетворяющей общему условію движенія (93). Если величина и направленіе приложенной къ точкѣ m силы будетъ F, а величина и направленіе ускоренія g, то величина и направленіе потерянной силы выразится геометрическою разностію

$$F \sim mg\,. \tag{106}$$

Эта сила должна быть уравновѣшена данными сопротивленіями, обусловливающими несвободу точки. Если точка не можетъ оставить данную поверхность, то на основаніи условій равновѣсія, которыя должны удовлетворяться въ каждый моментъ движенія, потерянная сила должна быть всегда перпендикулярна къ поверхности, и величина ея найдется, если мы каждую изъ двухъ силъ (106) проложимъ на нормаль къ поверхности и найдемъ алгебраическую сумму этихъ проложеній. Слѣдовательно, если P будетъ величина потерянной силы и n—направленіе нормали въ какую нибудь сторону отъ поверхности, то

$$P = F\cos(F,n) - mg\cos(g,n)\,. \tag{107}$$

Но, по § 7,

$$g = g_t + g_n = g_t + \frac{v^2}{\rho}\,,$$

гдѣ сумма берется геометрически, g_t и g_n перпендикулярны другъ къ другу, v есть скорость движенія, ρ—радіусъ соприкасающагося круга, и g_n направлено отъ окружности къ центру этого круга. Слѣдовательно:

$$g\cos(g,n) = g_t\cos(g_t,n) - \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,n)\,,$$

если направленіе ρ считать отъ центра къ окружности, т. е. противоположно g_n. Но такъ какъ g_t и n перпендикулярны другъ къ другу, то (107) превращается въ

$$P = F\cos(F,n) + \frac{mv^2}{\rho}\cos(\rho,n)\,. \tag{108}$$

Если приложенная сила равна нулю, то условіе движенія обращается въ

$$-mg\cos(g,\delta s).\delta s \leqq 0,$$

гдѣ δs есть одно изъ возможныхъ перемѣщеній точки въ каждый моментъ ея движенія. Но если точка движется по поверхности, то для нея возможны, какъ положительныя, такъ и отрицательныя величины δs; слѣдовательно, или должно быть $g = 0$, и тогда нѣтъ движенія, или $\cos(g,\delta s) = 0$, и тогда $\cos(\rho,n) = \pm 1$, вслѣдствіе чего по (108):

$$P = \pm \frac{mv^2}{\rho}, \tag{109}$$

гдѣ знаки $\pm$ берутся, смотря потому, совпадаютъ-ли ρ и n, или направлены другъ другу противоположно. Если точка можетъ оставить поверхность въ сторону, противоположную n, то P должно быть всегда положительно или нуль, для того чтобы возможная работа $-P\delta n$ оставалась всегда отрицательною или нулемъ. Въ такомъ случаѣ, если $\cos(F,n)$ и $\cos(\rho,n)$ въ (108) положительные, то движеніе возможно по поверхности со всякою скоростію; если оба косинуса отрицательные, то движеніе по поверхности невозможно; если знаки косинусовъ различные, то движеніе возможно, когда

$$F\cos(F,n) > -\frac{mv^2}{\rho}\cos(\rho,n), \quad \text{или} \quad -F\cos(F,n) < \frac{mv^2}{\rho}\cos(\rho,n),$$

смотря по тому, будетъ-ли $\cos(F,n)$ положительный или отрицательный. Если наконецъ,

$$F\cos(F,n) = -\frac{mv^2}{\rho}\cos(\rho,n), \tag{110}$$

то давленіе $P = 0$, и движеніе происходитъ такъ, какъ будто точка была свободна, т. е. вполнѣ обусловливается только одною силою F, независимо отъ присутствія поверхности.

---

§ 33. Кинетическая энергія.

Въ предыдущихъ параграфахъ мы разсматривали работу, которую данныя силы только могли-бы сдѣлать при данныхъ условіяхъ. Теперь обратимся къ той работѣ, которая дѣйствительно совершается

силами при данномъ движеніи ихъ точекъ приложенія. Прежде всего опредѣлимъ работу, совершаемую ускорительною силою.

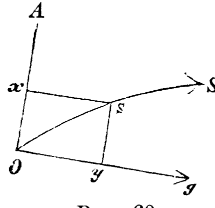


Рис. 60.

Пусть OS (рис. 60) будетъ криволинейный путь, по которому происходитъ движеніе данной матеріальной точки m, свободной или нѣтъ, и Og— направленіе ускоренія въ точкѣ O этого пути. Для каждой точки пути, вообще говоря, величина и направленіе ускореній будутъ различны; но для двухъ безконечно близкихъ точекъ величины и направленія ускореній будутъ другъ отъ друга отличаться безконечно мало, если движеніе измѣняется непрерывно. Въ этомъ предположеніи мы всегда можемъ отложить отъ точки O, вдоль по траэкторіи OS, нѣкоторую безконечно малую длину пути Os, для которой величина и направленіе ускоренія останутся неизмѣнными. Если элементъ Os будетъ безконечно малымъ, то изъ этого вообще не слѣдуетъ, что онъ долженъ быть прямолинейнымъ, ибо не всякая безконечно малая часть кривой линіи представляется прямолинейнымъ элементомъ, хотя на такіе элементы всякая кривая можетъ быть разбита. Разбить путь движущейся точки на прямолинейные элементы—значитъ сравнить данное движеніе съ безконечнымъ рядомъ другихъ различныхъ равномѣрныхъ движеній, изъ которыхъ каждое безконечно близко подходитъ къ данному, совершающемуся на той или другой части пути. Разбить движеніе на рядъ элементовъ съ постоянными, но для каждаго элемента разными, ускореніями, значитъ сравнить данное движеніе съ безконечнымъ рядомъ другихъ различныхъ параболическихъ движеній, изъ которыхъ каждое безконечно близко подходитъ къ данному, на соотвѣтствующей части пути. Такимъ образомъ, элементъ Os, отложенный нами вышеописаннымъ способомъ, представитъ собою часть параболы, которая можетъ на длинѣ Os совпадать съ кривою Os. Пусть Oy и Ox будутъ проложенія элемента Os на направленіе ускоренія g и на направленіе OA къ нему перпендикулярное. Тогда работа dL ускорительной силы mg на элементѣ пути Os будетъ равна по (60) произведенію изъ проложенія перемѣщенія на силу и величины силы, т. е.:

$$dL_1 = mg \, . \, \overline{Oy} \, . \tag{111}$$

Но путь Oy проходится проложеніемъ движущейся точки равномѣрно ускоренно (см. § 9), съ ускореніемъ g; слѣдовательно, если

мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{v}_0$ и $\mathfrak{v}_1$ начальную и конечную скорости проложенія на пути Oy, то (§ 6, (10)):

$$\overline{Oy} = \frac{\mathfrak{v}_1^2 - \mathfrak{v}_0^2}{2g},$$

откуда

$$dL_1 = \frac{1}{2}(m\mathfrak{v}_1^2 - m\mathfrak{v}_0^2). \qquad (112)$$

Такъ какъ направленіе OA перпендикулярно къ направленію ускоренія, то скорость движущейся точки по OA будетъ неизмѣнна. Называя эту скорость черезъ $\mathfrak{u}$, а начальную и конечную скорости по траэкторіи — черезъ v_0 и v_1, мы будемъ имѣть:

$$v_0^2 = \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}_0^2, \quad v_1^2 = \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}_1^2,$$

вслѣдствіе чего (112) превращается въ

$$dL_1 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (113)$$

Половина произведенія изъ массы движущейся точки и квадрата ея скорости называется кинетическою энергіею или живою силою *) данной массы. Выраженіе (113) показываетъ, что работа ускорительной силы на элементѣ пути, пока ускореніе остается неизмѣннымъ, измѣряется приращеніемъ кинетической энергіи на этомъ пути.

Если элементъ пути безконечно малъ и измѣненіе движенія происходитъ непрерывно, то упомянутое приращеніе живой силы будетъ тоже безконечно мало; обозначая это приращеніе символомъ d, мы можемъ форм. (113) представить вообще въ видѣ

$$dL = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \qquad (114)$$

для всякаго элемента пути.

Къ тому же самому мы прійдемъ, вычисляя работу слагающихъ ускорительныхъ силъ по осямъ координатъ. Пусть dL_x, dL_y, dL_z будутъ работы, выполняемыя соотвѣтственно силами mg_x, mg_y, mg_z, въ теченіи элемента времени dt, и пусть dx, dy, dz будутъ проложенія на оси координатъ элемента пути ds, проходимаго въ теченіе времени dt точкою приложенія этихъ силъ. Тогда

*) Нѣкоторые авторы называли живою силою произведеніе mv^2.

$$dL_x = mg_x \,.\, dx\,, \qquad dL_y = mg_y \,.\, dy\,, \qquad dL_z = mg_z \,.\, dz\,.$$

Обозначая затѣмъ черезъ $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ слагающія скорости по осямъ координатъ для начала и конца времени dt, и помня, что, въ теченіи элемента времени dt, движенія по осямъ координатъ могутъ быть разсматриваемы, какъ равномѣрно ускоренныя, мы найдемъ, что

$$dx = \frac{\mathfrak{u}_1^2 - \mathfrak{u}_0^2}{2g_x}, \qquad dy = \frac{\mathfrak{v}_1^2 - \mathfrak{v}_0^2}{2g_y}, \qquad dz = \frac{\mathfrak{w}_1^2 - \mathfrak{w}_0^2}{2g_z},$$

откуда

$$dL_x = \frac{1}{2}(m\mathfrak{u}_1^2 - m\mathfrak{u}_0^2)\,, dL_y = \frac{1}{2}(m\mathfrak{v}_1^2 - m\mathfrak{v}_0^2)\,, dL_z = \frac{1}{2}(m\mathfrak{w}_1^2 - m\mathfrak{w}_0^2);$$

но такъ какъ

$$dL = dL_x + dL_y + dL_z\,,$$

$$\mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2 = v_0^2\,, \qquad \mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{v}_1^2 + \mathfrak{w}_1^2 = v_1^2.$$

то

$$dL = \frac{1}{2}(mv_1^2 - mv_0^2)\,.$$

Всякую конечную длину криволинейнаго пути матеріальной точки мы разобьемъ на рядъ послѣдовательныхъ элементовъ, съ постоянными ускореніями. Если движеніе непрерывно, то конечная скорость предыдущаго элемента будетъ начальною скоростію послѣдующаго. Называя черезъ $v_2, v_3 \dots v$ скорости въ концахъ втораго, третьяго и т. д. до послѣдняго n-наго элемента разсматриваемаго пути, мы найдемъ, что работы ускорительной силы, dL_1, $dL_2, \dots dL$, на этихъ элементахъ будутъ

$$dL_1 = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2)\,,$$

$$dL_2 = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)\,,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$dL_{n-1} = \frac{m}{2}(v_{n-1}^2 - v_{n-2}^2)\,,$$

$$dL \quad = \frac{m}{2}(v^2 - v_{n-1}^2)\,.$$

Складывая предыдущія равенства (алгебраически), мы получаемъ въ лѣвой части алгебраическую сумму

$$dL_1 + dL_2 + \cdot \cdot \cdot dL,$$

которая представитъ работу ускорительной силы, дѣйствующей непрерывно и перемѣнно, на всѣхъ элементахъ пути OS, отъ того мѣста, гдѣ скорость движущейся точки есть v_0, до того мѣста, гдѣ эта скорость есть v. Называя эту интегральную работу черезъ L, мы получимъ въ результатѣ сложенія упомянутыхъ равенствъ:

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2}, \tag{115}$$

откуда видимъ, что работа ускорительной силы на всякомъ пути измѣряется приращеніемъ кинетической энергіи на этомъ пути.

Если мы имѣемъ цѣлую систему матеріальныхъ точекъ, то работа ускорительныхъ силъ для каждой изъ нихъ выразится разностію (115). Алгебраическую сумму живыхъ силъ всѣхъ движущихся точекъ системы, взятую для даннаго момента времени, будемъ называть кинетическою энергіею системы. Если мы обозначимъ

$$T = \frac{1}{2}\sum mv^2 \quad \text{и} \quad T_0 = \frac{1}{2}\sum mv_0^{\,2}, \tag{116}$$

гдѣ алгебраическая сумма берется по всѣмъ единовременнымъ скоростямъ точекъ системы, и если мы подъ L будемъ подразумѣвать работу всѣхъ ускорительныхъ силъ, при одновременномъ переходѣ точекъ системы отъ однѣхъ скоростей къ другимъ, то очевидно, получимъ:

$$L = T - T_0. \tag{117}$$

Обратимся теперь къ работѣ, совершаемой силами, приложенными къ точкамъ системы, при дѣйствительномъ перемѣщеніи этихъ послѣднихъ. Пусть ds будетъ элементъ пути, пройденный одною изъ точекъ системы въ теченіи элемента времени dt; если F представляетъ величину и направленіе силы, приложенной къ этой точкѣ, то работа силы F при упомянутомъ перемѣщеніи будетъ $F\cos(F, ds)\, ds$. Соотношеніе между суммою работъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, и суммою работъ ускорительныхъ силъ представляется условіемъ (92') для всякихъ совмѣстныхъ возможныхъ перемѣщеній системы. Но данныя дѣйствительныя совмѣстныя перемѣщенія точекъ системы очевидно тоже принадлежатъ къ числу возможныхъ; поэтому условіе (92') должно относиться также и къ дѣйствительнымъ перемѣщеніямъ, для которыхъ оно обращается въ

$$\sum\Big[F\cos(F\,,ds)-mg\cos(g\,,ds)\Big]\,ds \mathrel{\substack{=\\<}} 0\,, \tag{118}$$

гдѣ алгебраическая сумма берется по всѣмъ точкамъ системы.

Если условія, связывающія возможныя перемѣщенія точекъ системы, остаются одни и тѣже для всякаго времени, то очевидно, что, рядомъ съ системой дѣйствительныхъ перемѣщеній, непремѣнно должна существовать система другихъ возможныхъ перемѣщеній, прямо противоположныхъ первымъ. Если такъ, то выраженіе (118) должно для каждой системы дѣйствительныхъ перемѣщеній обращаться въ нуль. Дѣйствительно, если-бы это выраженіе дѣлалось отрицательнымъ для системы дѣйствительныхъ перемѣщеній, то оно дѣлалось-бы необходимо положительнымъ для системы возможныхъ перемѣщеній, прямо противоположныхъ дѣйствительнымъ; а положительнымъ оно по условію не можетъ быть ни при какой системѣ возможныхъ перемѣщеній. Итакъ, полагая (118) равнымъ нулю и помня (114), мы получаемъ, что работа приложенныхъ силъ равна работѣ ускорительныхъ силъ; т. е.:

$$\sum F\cos(F\,,ds)\,ds=\sum d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \tag{119}$$

или такъ какъ сумма приращеній какихъ либо величинъ равна очевидно приращенію суммы этихъ величинъ, то

$$\sum\cos(F\,,ds)\,ds=d\sum\frac{mv^2}{2}=dT\,, \tag{120}$$

или

$$(Xdx+Ydy+Zdz)=dT\,; \tag{120$'$}$$

т. е. работа приложенныхъ силъ при каждомъ элементарномъ перемѣщеніи точекъ системы, обусловленномъ этими силами, измѣряется соотвѣтственнымъ приращеніемъ кинетической энергіи системы.

Складывая работы, производимыя приложенными силами на каждомъ изъ ряда послѣдовательныхъ элементарныхъ перемѣщеній системы, мы получимъ работу L, произведенную упомянутыми силами, при любомъ конечномъ перемѣщеніи системы изъ одного положенія въ другое. Точно также, складывая приращенія кинетической энергіи при тѣхъ-же элементарныхъ перемѣщеніяхъ, и помня, что кинетическая энергія при концѣ одного перемѣщенія будетъ очевидно начальною

для послѣдующаго перемѣщенія, мы получимъ приращеніе кинетической энергіи на всемъ конечномъ переходѣ. Слѣдовательно, обозначая черезъ T_0 и T начальную и конечную величины кинетической энергіи, соотвѣтствующей данному переходу, мы получимъ, на основаніи (120):

$$L = T - T_0\,; \tag{121}$$

т. е. работа силъ, обусловливающихъ движеніе системы, равна всегда соотвѣтственному конечному или безконечно малому приращенію кинетической энергіи системы.

Въ случаѣ мгновенныхъ силъ, исходя изъ условія $(93)'$, если оно для дѣйствительнаго движенія обращается въ нуль, имѣемъ:

$$dx = u_0 t + \frac{u - u_0}{2t}\, t^2 = \frac{u_0 + u}{2}\, t\,,$$

$$dy = \frac{v_0 + v}{2}\, t\,, \quad dz = \frac{w_0 + w}{2}\, t\,,$$

ибо силы, дѣйствующія въ теченіи безконечно малаго времени t, могутъ быть приняты постоянными, а соотвѣтствующее движеніе — равномѣрно ускореннымъ. Поэтому замѣняя въ $(93)'$ возможныя перемѣщенія δx, δy, δz дѣйтвительными dx, dy, dz, получимъ:

$$\sum \left(J_x \frac{u_0 + u}{2} + J_y \frac{v_0 + v}{2} + J_z \frac{w_0 + w}{2}\right) = T - T_0, \tag{121$'$}$$

или такъ какъ

$$J_x = J\cos(J\,, x) \quad \text{и т. д.,} \qquad u = V\cos(V\,, x) \quad \text{и т. д.}$$

гдѣ V есть результирующая отъ u, v, w, и такъ какъ

$$\cos(J\,, x)\cos(V\,, x) + \cos(J\,, y)\cos(V\,, y) + \cos(J\,, z)\cos(V\,, z) = \cos(J\,, V)\,,$$

то $(121)'$ можно представить въ такомъ видѣ:

$$\sum \frac{1}{2} J[V_0 \cos(J\,, V_0) + V\cos(J\,, V) = T - T_0\,, \tag{121$''$}$$

или

$$\sum \frac{1}{2} J(V_0 + V) = T - T_0\,.$$

Итакъ, для измѣренія работы, произведенной силами, приложенными къ точкамъ системы, нужно знать, кромѣ массъ, связанныхъ съ этими точками, еще только ихъ начальныя и конечныя ско-

рости, независимо отъ формы пути, пройденнаго каждою точкою, или отъ измѣненія силъ, дѣйствовавшихъ на этомъ пути. Но отсюда не слѣдуетъ однако, что упомянутая работа или приращеніе кинетической энергіи не зависитъ, при данной формѣ пути, отъ величины силъ, дѣйствующихъ на каждомъ его элементѣ, или, при данныхъ силахъ—отъ формы пути; ибо, хотя работа силъ и вычисляется только съ помощію начальныхъ и конечныхъ скоростей, эти послѣднія однако, при различныхъ силахъ и при различныхъ формахъ путей ихъ точекъ приложенія, вообще будутъ различны.

Должно обратить вниманіе на то, что, на основаніи общаго условія движенія (118), только сумма работъ приложенныхъ силъ равна суммѣ работъ ускорительныхъ силъ, и слѣдовательно—приращенію суммы живыхъ силъ системы. Но изъ этого равенства не слѣдуетъ общее заключеніе, что работа каждой отдѣльной силы, дѣйствующей на какую-либо точку системы и обусловливающей ея движеніе, вообще равна работѣ ускорительной силы, приложенной къ той-же точкѣ. Поэтому приращеніе живой силы каждой отдѣльной точки системы, измѣряя работу ускорительной силы этой точки, независимо отъ величины ускорительныхъ силъ другихъ точекъ, не будетъ вообще представлять также работу силы, приложенной къ этой точкѣ. Точно также работа потерянной силы не будетъ равна нулю для каждой отдѣльной точки системы, при ея дѣйствительномъ движеніи, а будетъ нулемъ только сумма работъ потерянныхъ силъ для всѣхъ точекъ системы. Только въ случаѣ, если точки системы совершенно свободны, приложенныя силы тождественны съ ускорительными, и всѣ заключенія, относящіяся къ работѣ ускорительныхъ силъ, имѣютъ мѣсто и для работы приложенныхъ силъ.

Кинетическая энергія, представляя нѣкоторую работу, измѣряется очевидно единицами работы, т. е. эргами. Единицѣ кинетической энергіи будетъ очевидно соотвѣтствовать живая сила единицы массы, обладающей скоростію $\sqrt{2}$, или живая сила двухъ единицъ массы, обладающихъ скоростію, равною единицѣ.

---

§ 34. Работа взаимныхъ силъ.

Прежде всего припомнимъ, что взаимныя силы, по самому своему опредѣленію, суть силы центральныя; т. е. линія направленія каждой изъ взаимныхъ силъ, дѣйствующихъ на данную матеріальную

точку, непремѣнно проходитъ черезъ какую нибудь другую матеріальную точку, или, другими словами, всякая сила, дѣйствіе которой мы объясняемъ присутствіемъ матеріальныхъ массъ, должна разбиваться на составляющія, направленныя къ какимъ либо матеріальнымъ точкамъ. Такъ напримѣръ, если мы имѣемъ двѣ точки A и B, изъ которыхъ къ одной, положимъ точкѣ A, приложена нѣкоторая сила F, то существованіе этой силы мы только тогда можемъ объяснить присутствіемъ точки B, и говорить что B дѣйствуетъ на A съ силою F, когда F направлена по линіи AB; въ противномъ случаѣ мы должны искать, или предполагать, еще другія матеріальныя точки, одну или нѣсколько, которыя также дѣйствуютъ на точку A, по линіямъ ихъ разстояній такимъ образомъ, что ихъ силы, слагаясь съ силою, направленною по AB, даютъ въ результатѣ силу F. Если какое нибудь тѣло, которое мы можемъ всегда разсматривать, какъ совокупность матеріальныхъ точекъ, обусловливаетъ своимъ присутствіемъ силы, дѣйствующія на другое тѣло, то существованіе этихъ послѣднихъ мы можемъ лишь тогда объяснять, согласно съ третьимъ закономъ Ньютона, только присутствіемъ упомянутаго тѣла, когда каждая изъ силъ, дѣйствующихъ на второе тѣло, разбивается на составляющія, направленныя къ точкамъ перваго тѣла. Въ противномъ случаѣ мы должны искать или предполагать существованіе еще другихъ источниковъ силы. Точно также, принимая, что источникъ силы всегда найдется въ какой либо матеріальной массѣ, мы должны принять, строго говоря, что одна и таже данная масса, находясь въ одномъ и томъ-же положеніи относительно другой массы, дѣйствуетъ на эту послѣднюю всегда однимъ и тѣмъ-же образомъ; слѣдовательно, каждая изъ двухъ равныхъ взаимныхъ силъ, съ какими дѣйствуютъ другъ на друга двѣ данныя матеріальныя точки, останется всегда одна и таже, если взаимное положеніе двухъ точекъ, т. е. ихъ разстояніе, не измѣнится, какъ-бы ни измѣнялось при этомъ ихъ положеніе относительно другихъ точекъ. Если при одномъ и томъ-же разстояніи между двумя взаимодѣйствующими точками, но при разныхъ положеніяхъ ихъ линіи соединенія въ пространствѣ, величина силъ, дѣйствующихъ на ту или другую точку, будетъ мѣняться, то мы должны приписать такое измѣненіе внѣшней силѣ, источникъ которой находится внѣ обѣихъ данныхъ матеріальныхъ точекъ.

Переходя къ работѣ взаимныхъ, т. е. центральныхъ силъ, представимъ себѣ сперва простѣйшій случай, когда матеріальная точка

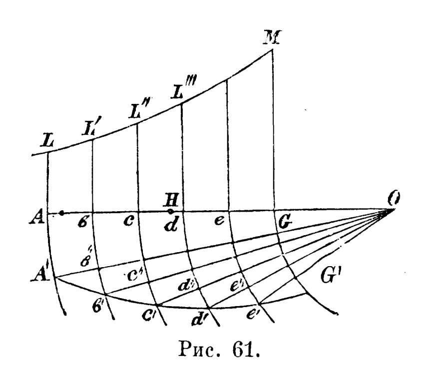


Рис. 61.

A (рис. 61) притягивается или отталкивается другою неподвижною матеріальною точкою O. Если точка A свободна и на нее дѣйствуетъ только сила, исходящая изъ O, то она будетъ двигаться въ ту или другую сторону по линіи OA. Пусть линія AG представляетъ длину пути, пройденнаго точкою A. Разбивая эту длину на элементарныя части посредствомъ безчисленнаго множества точекъ b, c, d и т. д., откладывая на перпендикулярахъ, возставленныхъ изъ этихъ послѣднихъ къ линіи AO, величины силъ, дѣйствующихъ на точку A, въ ея различныхъ разстояніяхъ отъ O, и соединяя концы упомянутыхъ перпендикуляровъ непрерывно кривою LM, мы получимъ площадь $ALMG$, которой величина представитъ, по § 26, работу перемѣнной центральной силы, дѣйствующей на точку A, на ея пути AG. Такъ какъ разсматриваемая центральная сила измѣняется только съ измѣненіемъ разстоянія A отъ O, то эта сила будетъ одна и таже на поверхности какой либо сферы, описанной изъ O, какъ центра; т. е. на точку A, помѣщенную въ различныхъ пунктахъ упомянутой сферической поверхности, будетъ дѣйствовать сила одной и той-же величины, если эта сила обусловливается только присутствіемъ матеріальной точки O. Предположимъ затѣмъ, что точка A не свободна, или что на нее дѣйствуютъ еще другія силы, отклоняющія ее отъ прямолинейнаго пути AG. Пусть A' и G' будутъ начальное и конечное положенія движущейся точки на ея новомъ пути, отстоящія отъ O на столько-же, на сколько въ первомъ случаѣ отстояли положенія A и G. Пусть кривая A' b' $c' \cdots G'$ представляетъ форму новаго пути между упомянутыми предѣлами. Эта кривая вообще можетъ не лежать въ одной плоскости. Описавъ около O, какъ центра, рядъ сферъ, проходящихъ послѣдовательно черезъ точки A, b $c \ldots$, мы разсѣчемъ этими сферами кривую $A'G'$ на элементарныя части Ab' bc' и т. д. Направленія силы въ точкахъ A', b', $c' \ldots$ представятся радіусами AO, $b'O$, $c'O \ldots$, а ея величины (тѣ-же, что въ точкахъ A, b, $c \ldots$)—перпендикулярами AL, bL', $cL'' \ldots$ Отрѣзки $A'b''$ $b'c''$ $c'd'' \ldots$ и т. д. представятъ проложенія элементарныхъ путей на направленія силъ, дѣйствующихъ на этихъ путяхъ. Упомянутые отрѣзки будутъ оче-

видно равны соотвѣтственно отрѣзкамъ Ab, bc, $cd\ldots$, такъ какъ всѣ сферы концентрическія. Работа силы на каждомъ изъ элементовъ пути будетъ равна произведенію изъ величины силы (напримѣръ — линіи cL) и проложенія элемента пути на направленіе силы (т. е. напримѣръ, отрѣзка $c'd''$, или равнаго ему cd). Такимъ образомъ, сумма элементарныхъ работъ на отрѣзкахъ пути $A'b'$, $b'c'$, $c'd'\ldots$ выразится черезъ

$$\overline{AL}\,.\,\overline{A'b''}+\overline{bL'}\,.\,\overline{b'c''}+\;.\;.\;.$$
$$=\overline{AL}\,.\,\overline{Ab}+\overline{bL'}\,.\,\overline{bc}+\overline{cL''}\,.\,\overline{cd}+\;.\;.\;.\;,$$

то есть тою-же площадью $ALMG$, что въ первомъ случаѣ. Итакъ, если точка движется подъ дѣйствіемъ центральной силы, то работа этой послѣдней имѣетъ одну и туже величину, какіе-бы пути ни проходила движущаяся точка между двумя своими данными положеніями, или вообще между двумя данными сферами, описанными около центра силы.

Если точка A остается неподвижною, а точка O движется, подъ дѣйствіемъ центральной силы центра A, отъ первоначальнаго разстоянія равнаго OA до конечнаго разстоянія $HA=GO$, то, по равенству взаимныхъ силъ, работа приложенной къ O силы будетъ таже, какъ при движеніи точки A между тѣми-же разстояніями. Дѣйствительно, чтобы представить эту работу графически, мы должны строить отъ точки O туже самую площадь, какъ прежде отъ точки A, ибо, по равенству взаимныхъ силъ, отъ точки O влѣво, вдоль по линіи OA, будутъ возставлены такіе-же перпендикуляры, какъ AL, bL' и т. д. Кромѣ того, хотя въ послѣднемъ случаѣ сила, дѣйствующая на точку O, будетъ противоположна по знаку силѣ, дѣйствующей въ первомъ случаѣ на A, но и перемѣщеніе точки O, подъ дѣйствіемъ упомянутой силы, будетъ противоположно по знаку перемѣщенію точки A; слѣдовательно работа силы, дѣйствующей на O въ разсматриваемомъ случаѣ, будетъ равна по величинѣ и по знаку работѣ силы, дѣйствовавшей на A въ предыдущемъ случаѣ. Если обѣ точки A и O движутся заразъ съ одинаkими скоростями, не измѣняя слѣдовательно своего разстоянія, то работы ихъ взаимныхъ силъ будутъ равны, но противоположны по знаку, ибо силы эти равны и противоположны, а перемѣщенія ихъ точекъ приложенія въ данномъ случаѣ одинаковы по величинѣ и по знаку. Если обѣ точки A и O движутся какъ угодно, и къ ихъ перемѣщенію будутъ приложены еще

перемѣщенія, одинакія для обѣихъ точекъ по величинѣ и по знаку, то сумма работъ двухъ разсматриваемыхъ взаимныхъ силъ при этомъ не измѣнится. Дѣйствительно, работа каждой изъ двухъ силъ на новыхъ путяхъ, произшедшихъ отъ приложенія вышеупомянутыхъ добавочныхъ перемѣщеній, будетъ равна (по § 26, (62')) суммѣ работъ на прежнихъ перемѣщеніяхъ и на прибавочныхъ; но работы обѣихъ взаимныхъ силъ на этихъ послѣднихъ перемѣщеніяхъ равны и противоположны; слѣдовательно алгебраическая сумма работъ на результирующихъ перемѣщеніяхъ останется прежняя.

Предположимъ теперь, что обѣ точки A и O движутся заразъ по какимъ угодно путямъ и переходятъ отъ разстоянія γ_1 между ними къ разстоянію γ_2; опредѣлимъ соотвѣтствующую сумму работъ взаимныхъ силъ обѣихъ точекъ. На каждыхъ двухъ соотвѣтствующихъ элементахъ путей, проходимыхъ одновременно точками A и O, будемъ прилагать къ перемѣщеніямъ этихъ точекъ новыя перемѣщенія, одинакія по величинѣ и знаку; кромѣ того выберемъ эти послѣднія такъ, чтобы они были еще всегда равны и противоположны соотвѣтствующему перемѣщенію одной изъ точекъ A или O. Сумма работъ разсматриваемыхъ взаимныхъ силъ отъ такихъ прибавочныхъ перемѣщеній не измѣнится, и будетъ очевидно таже самая, какъ въ томъ случаѣ, когда одна изъ точекъ была-бы неподвижна, а другая перемѣщалась-бы съ разстоянія γ_1 относительно первой на разстояніе γ_2. Но величина этой послѣдней работы не зависитъ отъ формы пути движущейся точки между предѣльными разстояніями γ_1 и γ_2; слѣдовательно заключаемъ вообще, что *сумма работъ каждой пары взаимныхъ силъ не зависитъ отъ формы путей, проходимыхъ обѣими взаимодѣйствующими точками и остается всегда одна и таже между одними и тѣми-же предѣльными взаимными разстояніями обѣихъ точекъ.*

Если нѣсколько свободныхъ или связныхъ матеріальныхъ точекъ дѣйствуютъ другъ на друга со взаимными силами, то сумма работъ всѣхъ этихъ силъ при какомъ нибудь перемѣщеніи точекъ будетъ слагаться изъ работъ силъ, съ которыми каждыя двѣ изъ точекъ системы дѣйствуютъ другъ на друга, ибо работа равнодѣйствующихъ силъ равна суммѣ работъ слагающихъ. Но сумма работъ каждой пары взаимныхъ силъ будетъ опредѣляться только начальнымъ и конечными разстояніями соотвѣтствующихъ двухъ матеріальныхъ точекъ; слѣдовательно вообще: *сумма работъ всѣхъ взаимныхъ силъ,*

дѣйствующихъ между матеріальными точками, свободными или несвободными, данной системы, остается всегда одна и таже при перемѣщеніяхъ между двумя данными относительными расположеніями этихъ точекъ, по какимъ-бы путямъ онѣ ни перемѣщались между двумя упомянутыми размѣщеніями. При этомъ остается постоянною и сумма работъ каждой пары взаимныхъ силъ, но очевидно—не каждой изъ взаимныхъ силъ отдѣльно, и не каждой результирующей взаимныхъ силъ, приложенной къ той или другой точкѣ системы. Если начальное и конечное размѣщенія точекъ системы совпадаютъ, то работа взаимныхъ силъ обращается въ нуль; слѣдовательно, если точки системы, выйдя изъ нѣкоторыхъ положеній, послѣ ряда перемѣщеній опять возвращаются къ этимъ положеніямъ, то при этомъ работа взаимныхъ силъ равна нулю.

Если мы имѣемъ n матеріальныхъ точекъ, составляющихъ данную систему и движущихся подъ дѣйствіемъ ихъ взаимныхъ силъ, то, выдѣливши изъ числа n число m матеріальныхъ точекъ, мы можемъ утверждать, что работа взаимныхъ силъ между этими m точками будетъ одна и таже для всѣхъ путей между двумя данными размѣщеніями m точекъ; но при этомъ не будетъ одна и таже работа всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на эти точки, ибо къ нимъ прилагаются еще силы, зависящія отъ остальныхъ $n—m$ точекъ системы; а работа этихъ силъ будетъ тогда, при данныхъ условіяхъ, одна и таже, когда, при различныхъ путяхъ выдѣленныхъ m точекъ между двумя данными ихъ размѣщеніями, остальныя $n - m$ точекъ будутъ каждый разъ перемѣщаться только въ предѣлахъ между двумя одними и тѣмиже расположеніями относительно разсматриваемыхъ m точекъ.

---

§ 35. Законъ сохраненія энергіи.

Изъ объясненныхъ въ предыдущемъ параграфѣ свойствъ работы взаимныхъ силъ непосредственно слѣдуетъ, что приращеніе кинетической энергіи системы точекъ, находящихся только подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, остается одно и тоже при перемѣщеніи точекъ между ихъ двумя данными расположеніями, независимо отъ формы ихъ путей. Дѣйствительно, приращеніе кинетической энергіи измѣряетъ (по § 33) работу всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, при

упомянутомъ перемѣщеніи; но такъ какъ по предположенію приложенныя силы суть взаимныя, то эта работа, а слѣдовательно и измѣряющее ее приращеніе кинетической энергіи, не зависитъ отъ формы пути между двумя данными расположеніями точекъ системы относительно другъ друга. Выведенное слѣдствіе извѣстно подъ именемъ закона живыхъ силъ, и представляетъ формулировку одной стороны более общаго закона — сохраненія энергіи.

Въ видѣ примѣра представимъ себѣ случай, когда нѣкоторая матеріальная точка движется подъ дѣйствіемъ постоянной по величинѣ и направленію силы F (напр. силы тяжести) между двумя плоскостями (рис. 62) aa и bb, перпендикулярными къ направленію F. Силу F можно разсматривать здѣсь, какъ центральную, причемъ дѣйствующій центръ находится всегда на безконечномъ разстояніи отъ движущейся точки. Работа силы F будетъ при этомъ одна и таже, проходитъ-ли точка свободно длину ab въ направленіи силы, или, вслѣдствіе ограничивающихъ ея свободу препятствій, она движется между тѣми-же плоскостями по кривымъ ac, ad, или ae. Точно также, во всѣхъ упомянутыхъ случаяхъ будетъ одно и тоже приращеніе кинетической энергіи системы, которая тутъ состоитъ вся изъ живой силы движущейся точки. Если первоначальная скорость точки въ a есть нуль, то въ концѣ каждаго изъ упомянутыхъ путей, эта точка очевидно пріобрѣтетъ одну и туже скорость v (по величинѣ) независимо отъ формы путей, ибо приращеніе ея живой силы, равное при этомъ условіи $\frac{mv^2}{2}$, будетъ всегда одно и тоже.

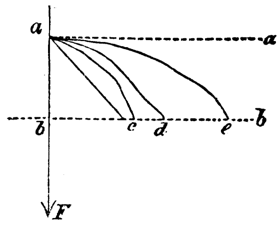


Рис. 62.

Представимъ себѣ нѣкоторое заранѣе опредѣленное размѣщеніе матеріальныхъ точекъ, свободныхъ или нѣтъ, находящихся подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, и назовемъ это размѣщеніе буквою A. Предположимъ затѣмъ, что точки системы движутся отъ нѣкотораго своего первоначальнаго положенія, въ которомъ кинетическая энергія системы равна T_0, и на пути своего движенія проходятъ черезъ размѣщеніе, для котораго кинетическая энергія системы дѣлается равною T. Тогда разность $T—T_0$ измѣряетъ положительную или отрицательную работу, выполненную взаимными силами системы на пути, между двумя упомянутыми размѣщеніями ея точекъ. Но такъ какъ съ другой стороны, эта работа не зависитъ отъ формы путей точекъ

между размѣщеніями (T_0) и (T), то мы можемъ ее вычислить, предполагая, что система приходитъ изъ положенія (T_0) въ положеніе (T), переходя на своемъ пути черезъ размѣщеніе A; т. е. работа взаимныхъ силъ, на пути между (T_0) и (T), будетъ очевидно равна суммѣ работъ, которыя были-бы совершены, если-бы система перемѣщалась отъ (T_0) къ A, и затѣмъ—отъ A къ (T). Обозначимъ черезъ ω_0 работу взаимныхъ силъ между размѣщеніями (T_0) и A, а черезъ ω— работу при переходѣ отъ размѣщенія (T) къ A. Тогда очевидно,—ω выразитъ работу при переходѣ отъ A къ (T), ибо работа, на пути отъ (T) къ A и опять къ (T), должна быть равна нулю. Такимъ образомъ, работа, при послѣдовательныхъ переходахъ между размѣщеніями (T_0), A и (T), выразится черезъ $\omega_0-\omega$, и слѣдовательно (см. (121)):

$$T - T_0 = \omega_0 - \omega \,, \tag{122}$$

или:

$$T + \omega = T_0 + \omega_0 \,, \tag{123}$$

гдѣ подъ T мы можемъ подразумѣвать кинетическую энергію системы въ любомъ ея положеніи, во время движенія изъ начальнаго положенія ω_0, а подъ ω — соотвѣтствующую работу, которую должны выполнить взаимныя силы, если система будетъ какъ-либо переведена изъ разсматриваемаго переходнаго состоянія (T) въ нѣкоторое заранѣе опредѣленное состояніе A. Эта работа ω, которую силы системы изъ какого либо ея даннаго состоянія *имѣютъ возможность выполнить*, при переходѣ въ другое, заранѣе разъ на всегда отмѣченное, состояніе, называется *потенціальною энергіею* системы въ ея данномъ состояніи. Очевидно, что потенціальная энергія по своей величинѣ зависитъ только отъ относительнаго размѣщенія точекъ системы. Убыль потенціальной энергіи между двумя состояніями системы, или ея отрицательное приращеніе (т. е. разность $\omega_0 - \omega$ между величинами потенціальной энергіи въ первомъ и во второмъ состояніи), измѣряетъ соотвѣтствующую работу взаимныхъ силъ.

Уравненіе (123) показываетъ, что *если точки системы, выйдя изъ опредѣленнаго своего начальнаго положенія, будутъ двигаться подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, то во все время движенія сумма изъ потенціальной и кинетической энергіи системы останется неиз-*

мѣнною. Уравненіе-же (122) выражаетъ очевидно упомянутый въ началѣ параграфа законъ живыхъ силъ, который можетъ быть формулированъ еще такимъ образомъ: приращеніе кинетической энергіи системы точекъ, движущихся подъ дѣйствіемъ взаимныхъ силъ, измѣряется убылью потенціальной энергіи, и не зависитъ отъ формы пути между двумя данными размѣщеніями точекъ.

Выбравши для данной системы, вмѣсто размѣщенія ея точекъ A, какое нибудь другое размѣщеніе B, по направленію къ которому мы будемъ отсчитывать потенціальную энергію всѣхъ другихъ состояній системы, мы тѣмъ самымъ измѣнимъ величину потенціальной энергіи для каждаго изъ состояній системы. Но легко видѣть, что эта величина измѣнится для всѣхъ размѣщеній на одно и тоже количество, такъ что разности между величинами потенціальной энергіи для двухъ какихъ нибудь состояній системы всегда останутся однѣ и тѣже, независимо отъ выбора заранѣе отмѣченныхъ состояній A или B. Это очевидно уже изъ того, что упомянутая разность величинъ потенціальной энергіи для двухъ какихъ либо состояній системы, представляя работу взаимныхъ силъ между этими состояніями, остается всегда одна и таже. Кромѣ того, слѣдующія соображенія позволяютъ намъ опредѣлить, на сколько измѣнятся величины потенціальной энергіи для разныхъ состояній системы, съ перемѣной размѣщенія A на размѣщеніе B. Пусть ω_1 и ω_2 будутъ величины потенціальной энергіи двухъ состояній (1) и (2), по отношенію къ размѣщенію A; пусть ω_1' и ω_2' будутъ такія-же величины тѣхъ-же состояній, по отношенію къ размѣщенію B, и пусть α будетъ величина потенціальной энергіи состоянія A, по отношенію къ размѣщенію B; т. е. α будетъ равно работѣ взаимныхъ силъ при переходѣ отъ A къ B. Тогда, на основаніи извѣстныхъ свойствъ работы взаимныхъ силъ, ихъ работа между (1) и B, т. е. ω_1', будетъ равна работѣ между (1) и A + работѣ между A и B; т. е.

$$\omega_1' = \omega_1 + \alpha \quad \text{и} \quad \omega_2' = \omega_2 + \alpha ,$$

а слѣдовательно: (124)

$$\omega_1' - \omega_1 = \omega_2' - \omega_2 = \alpha ,$$

что и потребовалось доказать.

Слѣдовательно, относительно какого-бы размѣщенія A точекъ системы (но всегда одного) мы ни считали величины ея потенціальной энергіи для различныхъ моментовъ движенія, сумма изъ потен-

ціальной и кинетической энергіи будетъ во все время движенія оставаться неизмѣнною. Дѣйствительно, прибавляя къ обѣимъ частямъ (123) совершенно произвольную постоянную величину α, мы имѣемъ:

$$T + \omega + \alpha = T_0 + \omega_0 + \alpha,$$

или по (124):

$$T + \omega' = T_0 + \omega_0'. \tag{125}$$

Сумма изъ потенціальной и кинетической энергіи называется энергіею системы, и уравненія (123) и (125), указывающія на постоянство величины этой энергіи во время движенія, выражаютъ законъ сохраненія энергіи, величина которой не можетъ быть измѣнена взаимными силами системы; т. е.

$$T + \omega = Const. \tag{126}$$

Система точекъ, энергія которой остается неизмѣнною во время движенія, называется консервативною.

Постоянная величина (Constans) въ выраженіи (126), представляя количество энергіи системы, представляетъ также очевидно съ одной стороны потенціальную энергію системы для того моментальнаго ея состоянія, при кототомъ $T = 0$; но такъ какъ

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}$$

и является суммою существенно положительныхъ членовъ, то она можетъ обращаться въ нуль только тогда, когда каждый членъ суммы будетъ нуль, т. е. когда всѣ $v = 0$; слѣдовательно Const. представитъ потенціальную энергію для того момента времени, когда всѣ скорости системы будутъ нулями. Съ другой стороны, Const. можно разсматривать, какъ величину кинетической энергіи системы для того ея состоянія, въ которомъ ея потенціальная энергія обращается въ нуль. Итакъ, чтобы измѣрить количество энергіи системы, нужно знать или ея потенціальную энергію для размѣщенія съ нулевыми скоростями, или ея кинетическую энергію для размѣщенія съ нулевой потенціальной энергіей.

Абсолютная величина энергіи системы остается произвольною въ выраженіяхъ (125) и (126), ибо она зависитъ отъ произвола въ выборѣ размѣщенія A, относительно котораго считается потенціальная энергія; но разъ будучи выбрана тою или другою, величина энергіи не измѣняется во все время движенія системы. Однако упомя-

нутая произвольность исчезаетъ, если мы разъ на всегда условимся выбирать такое размѣщеніе A, которое было-бы связано съ извѣстными опредѣленными свойствами системы въ соотвѣтствующемъ ея состояніи.

Между всѣми размѣщеніями, въ которыя могутъ прійти точки системы, отправляясь изъ нѣкотораго состоянія (1), мы выберемъ такое (A), относительно котораго потенціальная энергія, т. е. работа между (1) и (A), будетъ наибольшая. Тогда легко видѣть, что потенціальная энергія какого либо другаго размѣщенія (2) системы относительно (A) будетъ тоже наибольшая. Дѣйствительно, пусть Π_1 и ω_1 будутъ величины потенціальной энергіи для состоянія (1), отсчитанныя соотвѣтственно относительно размѣщеній (A) и какого-либо другаго B; тогда по условію $\Pi_1 > \omega_1$. Если теперь Π_2 и ω_2 будутъ подобнаго-же рода величины потенціальной энергіи для состоянія (2), то на основаніи (124):

$$\Pi_1 - \omega_1 = \Pi_2 - \omega_2$$

и слѣдовательно

$$\Pi_2 > \omega_2 . \tag{127}$$

Кромѣ того, для каждаго соотвѣтствующаго размѣщенія наибольшая величина потенціальной энергіи Π должна быть положительною, ибо относительно какого-бы другаго размѣщенія, кромѣ (A), мы ни опредѣлили величину потенціальной энергіи ω, мы должны имѣть всегда $\Pi > \omega$; но между всевозможными величинами, которыя мы можемъ приписать ω, измѣняя выборъ отмѣченнаго размѣщенія B, есть также и величина $\omega = 0$, которую получимъ, если размѣщеніе B отождествимъ съ разсматриваемымъ состояніемъ (ω); слѣдовательно между прочимъ должно быть также всякое $\Pi > 0$. Опредѣляя вышеуказаннымъ способомъ величины Π потенціальной энергіи для различныхъ расположеній точекъ системы, мы можемъ выбрать такое размѣщеніе (B), для котораго величина Π относительно (A) будетъ больше, чѣмъ для каждаго изъ остальныхъ. Назовемъ черезъ Q эту возможно наибольшую величину потенціальной энергіи системы относительно размѣщенія (A). Тогда Q представитъ очевидно наибольшую работу, которую когда либо могутъ выполнить взаимныя силы данной системы, и будетъ служить мѣрою, такъ сказать, могущества системы. Дѣйствительно, работа, которую взаимныя силы системы могутъ выполнить между какими либо другими размѣщеніями (1) и

(2), не совпадающими съ (A) и (B), будетъ всегда меньше (если не равна) Q, ибо эта работа выразится разностію $\Pi_1 - \Pi_2$; а такъ какъ по условію $0 < \Pi_1 < Q$ и $0 < \Pi_2 < Q$, то $\Pi_1 - \Pi_2 < Q - \Pi_2$; но $\Pi_2 > 0$, слѣдовательно и подавно $\Pi_1 - \Pi_2 < Q$.

Если Π будетъ величина потенціальной энергіи системы, въ одномъ изъ ея состояній, относительно размѣщенія (A), то подобная же величина того-же состоянія, относительно размѣщенія (B), будетъ очевидно $\pi = \Pi - Q$ и слѣдовательно всегда отрицательная, ибо $\Pi < Q$. Кромѣ того, π будетъ наименальная изъ всѣхъ величинъ потенціальной энергіи, которыя мы можемъ приписать данному положенію точекъ системы, измѣняя выборъ сравниваемаго размѣщенія. Дѣйствительно, пусть ω будетъ величина потенціальной энергіи. въ разсматриваемомъ состояніи, относительно нѣкотораго размѣщенія (B'); тогда

$$\omega = \Pi - Q',$$

гдѣ Q' есть работа между (B') и (A), которая по условію всегда меньше, чѣмъ Q, т. е.—чѣмъ работа между (B) и (A); слѣдовательно $\pi < \omega$.

Такимъ образомъ мы опредѣлили два предѣла π и Π, между которыми лежатъ величины, могущія быть приписаны потенціальной энергіи ω системы въ данномъ ея состояніи, при чемъ всегда

$$\Pi - \pi = Q . \tag{128}$$

Введеніемъ наибольшей величины потенціальной энергіи въ уравненіе (123), выражающее законъ сохраненія энергіи, мы можемъ дать этому уравненію болѣе опредѣленное механическое толкованіе. Имѣя въ такомъ случаѣ для каждаго момента движенія равенство

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 , \tag{129}$$

мы видимъ во первыхъ, какъ и прежде, что количество энергіи системы $T + \Pi$ во время движенія остается неизмѣннымъ, при чемъ оба вида энергіи увеличиваются или уменьшаются на счетъ другъ друга; т. е. одинъ ея видъ переходитъ въ другой, или наоборотъ. Кромѣ того, мы не можемъ себѣ представить никакого такого первоначальнаго положенія системы, для котораго было-бы $\Pi_0 > Q$ или $\Pi_0 < 0$. Но величина кинетической энергіи T_0, въ первоначальномъ положеніи, можетъ быть какою угодно, разумѣется положительною, величиною. Слѣдовательно вообще могутъ представиться такіе три

случая:

$$\Pi_0 + T_0 = Q\,, \quad \Pi_0 + T_0 > Q\,, \quad \Pi_0 + T_0 < Q\,. \tag{130}$$

Въ первомъ случаѣ ур. (129) превращается въ

$$T + \Pi = Q\,, \quad \text{или} \quad T = -\pi\,, \tag{131}$$

которое указываетъ, что движеніе совершается изъ положенія (Π_0, T_0) такимъ же образомъ, какъ будто оно началось отъ размѣщенія (B), гдѣ $\Pi_0 = Q$, съ первоначальнымъ запасомъ кинетической энергіи, равной нулю; т. е. система въ положеніи (Π_0) обладаетъ такою кинетическою энергіею, которая явилась-бы слѣдствіемъ работы взаимныхъ силъ системы на пути отъ размѣщенія (B) до размѣщенія (Π_0), съ начальными скоростями равными нулю. Если на систему не дѣйствовали до начала ея движенія никакія внѣшнія силы, то случай (131) есть единственный, какой только можетъ существовать. Дѣйствительно, величина Q представляетъ наибольшую работу, которую когда либо могутъ совершить взаимныя силы системы; а такъ какъ совершенная работа измѣряется пріобрѣтенною кинетическою энергіею, то система, имѣя въ началѣ кинетическую энергію нуль, не можетъ пріобрѣсть, подъ дѣйствіемъ однѣхъ только взаимныхъ силъ, кинетическую энергію большую Q. Во второмъ изъ случаевъ (130)

$$T_0 + \Pi_0 = Q + \tau\,,$$

гдѣ τ, представляющее избытокъ энергіи системы противъ Q, есть величина существенно положительная, и должна представлять нѣкоторую кинетическую энергію, ибо потенціальной энергіи у системы больше Q быть не можетъ. Уравненіе (129) въ этомъ случаѣ обращается въ

$$T + \Pi = Q + \tau, \tag{132}$$

которое показываетъ, что движеніе совершается отъ положенія (Π_0, T_0) такъ, какъ будто оно началось изъ размѣщенія (B), съ первоначальнымъ запасомъ кинетической энергіи τ. Во время движенія T можетъ измѣняться отъ τ до Q, а Π—отъ Q до нуля. Чтобы такое движеніе имѣло мѣсто, необходимо дѣйствіе внѣшнихъ силъ, или—непремѣнно мгновенное, если движеніе, по закону (132), дѣйствительно началось съ (B), или—въ теченіи нѣкотораго промежутка времени, между положеніями (B) и (Π_0), если движеніе (132) началось изъ (Π_0). Работа упомянутыхъ силъ и обусловитъ приращеніе естественнаго запаса Q энергіи системы на величину τ. Наконецъ въ третьемъ изъ случаевъ (130), когда

$$\Pi_0 + T_0 = Q - q\,,$$

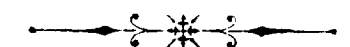
гдѣ q есть существенно положительная величина, ур. (129) обращается въ

$$T + \Pi = Q - q\,, \tag{133}$$

которое показываетъ, что движеніе происходитъ такъ, какъ будто система вышла изъ положенія $(Q - q)$ съ нулевыми скоростями, при чемъ работа q, совершенная взаимными силами отъ (B) до $(Q - q)$, не обратилась въ кинетическую энергію ея массъ, а безвозвратно потерялась для системы. Кромѣ того, при движеніи (133) для системы нѣтъ возможности когда-либо, подъ дѣйствіемъ только взаимныхъ силъ, прійти къ размѣщенію (B), ибо тогда было-бы $\Pi = Q$, и ур. (133) обратилось-бы въ $T = -q$, что не имѣетъ смысла, такъ какъ T всегда существенно положительно. Такой случай можетъ быть, когда гдѣ-либо на пути системы, отъ (B) къ (Π_0), къ ея точкамъ будутъ приложены внѣшнія силы, работающія противъ взаимнымъ силъ системы. Тогда часть естественнаго запаса Q энергіи системы затратится на побѣжденіе внѣшнихъ сопротивленій. Но очевидно, что крайній предѣлъ, къ которому стремится величина работы внѣшнихъ сопротивленій (силъ), выполнимой на счетъ могущества системы, есть Q, ибо при $Q = q$ мы имѣемъ

$$\Pi + T = 0\,,$$

что не имѣетъ смысла, ибо Π и T существенно положительны. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, всегда $T = 0$ и $\Pi = 0$, т. е. система лишена движенія и энергіи.



Разсмотрѣнные выше случаи могутъ быть наглядно пояснены примѣромъ движенія простаго маятника.

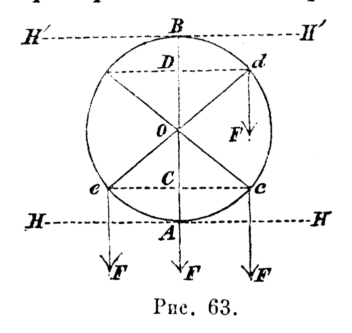


Рис. 63.

Представимъ себѣ нѣкоторую матеріальную точку массы m, соединенную несгибаемою и нерастяжимою нитью l съ неподвижнымъ центромъ O (рис. 63). Въ какомъ-бы изъ возможныхъ положеній A, B, c, d, e... вокругъ центра O мы ни представили себѣ точку m, къ ней будетъ всегда приложена сила F, одной и той же величины и направленія. Въ данномъ случаѣ система состоитъ изъ точки m и другой нѣкоторой матеріаль-

ной точки, неподвижной и безконечно удаленной отъ O. Вслѣдствіе этого сила F, обусловливаемая этою второю матеріальною точкою, будетъ постоянна и сама себѣ параллельна. Размѣщеніе системы мѣняется постольку, поскольку измѣнится положеніе точки m. Могущество системы измѣрится работою силы F на пути между положеніями B и A, и будетъ

$$Q = F.\overline{AB} = F.2l. \tag{134}$$

Положеніе B будетъ соотвѣтствовать равновѣсію нашей движущейся точки, если она въ этомъ положеніи не обладаетъ никакою скоростію, ибо здѣсь сила F направлена перпендикулярно къ возможнымъ для точки перемѣщеніямъ, которыя, въ случаѣ несгибаемости нити l, могутъ происходить изъ B только по кругу. Но движеніе отъ B становится возможнымъ, если точка будетъ какъ угодно мало отклонена отъ положенія B, или если ей будетъ въ этомъ положеніи сообщена какая-либо какъ угодно малая первоначальная скорость; т. е. движеніе будетъ возможно, если первоначальныя величины Π_0 или T_0 будутъ какъ угодно мало разниться отъ нуля, положимъ—на величину ε. Въ такомъ случаѣ во все время движенія мы будемъ имѣть:

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = F.2l + \varepsilon,$$

или, обозначая черезъ h высоту точки, въ какой либо моментъ ея движенія, надъ плоскостію HH, перпендикулярною къ F (т. е.—одну изъ величинъ AC, AD...), мы будемъ очевидно имѣть:

$$\Pi = F.h \quad \text{и} \quad \frac{mv^2}{2} + F.h = F.2l + \varepsilon, \tag{135}$$

при чемъ количество энергіи во время движенія не равно строго $F.2l$, но на какъ угодно малую разницу больше этой величины. Смотря по направленію вышеупомянутой первоначальной скорости или первоначальнаго отклоненія, точка m будетъ двигаться отъ B по той или другой сторонѣ круга B, d, c, e, при чемъ потенціальная энергія системы будетъ уменьшаться, переходя въ кинетическую. Эта послѣдняя достигнетъ своей наибольшей величины въ точкѣ A, гдѣ $h = 0$ и слѣдовательно $\frac{mv_A^2}{2} = F.2l$. Положеніе A опять соотвѣтствуетъ равновѣсію точки m, будетъ ли нить l несгибаема или нѣтъ, лишь-бы она была нерастяжима. Но остаться въ этомъ поло-

женіи точка не можетъ, обладая скоростію v_a; слѣдовательно движеніе будетъ продолжаться въ направленіи скорости v_a, при чемъ кинетическая энергія будетъ уменьшаться, переходя въ потенціальную, и достигнетъ своей наименьшей величины въ B, гдѣ $\Pi = F.2l$ и $\frac{mv^2}{2} = \varepsilon$. Если въ положеніи B точка m обладаетъ нѣкоторымъ конечнымъ запасомъ T_0 кинетической энергіи, то во все время движенія

$$\frac{mv^2}{2} + T.h = F.2l + T_0, \tag{136}$$

и мы будемъ опять имѣть непрерывное движеніе по кругу, при чемъ T будетъ измѣняться отъ T_0 до $F.2l + T_0$, а Π — отъ $F.2l$ до нуля, и обратно. Запасъ энергіи системы будетъ больше ея могущества, и часть этого запаса всегда останется въ видѣ кинетической энергіи. Итакъ мы видимъ, что всякое, какъ угодно малое, измѣненіе энергіи системы въ ея положеніи равновѣсія B обусловливаетъ нарушеніе этого равновѣсія и вызываетъ дальнѣйшее превращеніе одного вида энергіи въ другой, т. е. движеніе. Во все время послѣдующаго движенія, количество энергіи можетъ быть больше или почти равно могуществу системы, но никакъ не меньше его. Положеніе B называется, на основаніи вышесказанныхъ свойствъ, положеніемъ неустойчиваго равновѣсія.

Если точка m находится гдѣ нибудь между положеніями B и A, то равновѣсіе невозможно, и она будетъ двигаться вообще въ сторону сообщенной скорости, или—въ сторону положительнаго дѣйствія силы, если первоначальная скорость нуль. Пусть h_0 будетъ высота первоначальнаго положенія надъ плоскостію HH (при чемъ $h_0 < 2l$) и v_0—первоначальная скорость. Тогда во все время движенія,

$$\frac{mv^2}{2} + Fh = \frac{mv_0^2}{2} + Fh_0, \tag{137}$$

при чемъ очевидно можетъ быть, что

$$\frac{mv_0^2}{2} + Fh_0 < F.2l. \tag{138}$$

Движеніе начнется съ уменьшенія h, если v_0 направлена въ сторону положительнаго дѣйствія силы F. Тогда кинетическая энергія $\frac{mv^2}{2}$ начнетъ увеличиваться и при $h = 0$, т. е. въ A, достигнетъ

наибольшей величины, послѣ чего потенціальная энергія начнетъ увеличиваться, а кинетическая уменьшаться, и эта послѣдняя достигнетъ, при $h = h_0$, своей первоначальной величины $\frac{mv_0^2}{2}$, по другую сторону отъ A, на своемъ круговомъ пути. Отсюда движеніе будетъ продолжаться въ сторону имѣющейся у точки скорости, т. е. въ сторону увеличивающагося h, до тѣхъ поръ, пока v не обратится въ нуль на такой высотѣ h_1, что

$$Fh_1 = \frac{mv_0^2}{2} + Fh_0\,, \tag{139}$$

что всегда возможно, если правая часть (139) меньше могущества $F.2l$ или равна ему. Въ послѣднемъ случаѣ очевидно будетъ $h_1 = 2l$, и точка, прійдя въ B и не обладая никакою скоростію, тамъ остановится. Если же $h_1 < 2l$, то движеніе пойдетъ назадъ, и точка по другую сторону круга опять подымется на высоту h_1, и т. д.; но никогда уже не попадетъ въ положеніе B.

Итакъ мы заключаемъ, что если точка начинаетъ свое движеніе изъ положенія B, то естественный запасъ энергіи системы, т. е. ея могущество, является въ цѣлости, и во время движенія превращается въ кинетическую энергію; если же движеніе начинается отъ промежуточныхъ положеній между B и A, безъ первоначальной кинетической энергіи, то часть естественнаго запаса энергіи системы является уже израсходованной, и только ея остатокъ превращается затѣмъ въ кинетическую энергію. Въ такомъ случаѣ мы должны или считать положеніе B, какъ недостижимое для системы, и мѣрить могущество системы не работою между B и A, а работою между крайнимъ достижимымъ положеніемъ, напр. c или d. и A; или мы должны себѣ представить, что система дѣйствительно вышла изъ B, но на пути до положенія h_0 на нее дѣйствовали внѣшнія силы, которыя уравновѣшивали силу F, вплоть до положенія h_0. Въ такомъ случаѣ первоначальная, какъ угодно малая, скорость не могла увеличиваться отъ B до h_0; а работа силы F на упомянутомъ пути была равна и противоположна работѣ внѣшнихъ силъ. Но эта работа, равная очевидно $F(2l - h_0)$, и представляетъ невозвратимую убыль могущества системы, о которой было сказано выше. Слѣдовательно мы можемъ сказать, что при упомянутыхъ условіяхъ часть энергіи системы утрачена безвозвратно на побѣжденіе сопротивленія внѣшнихъ силъ.

Если движеніе начинается отъ A, то

$$\frac{mv^2}{2}+Fh=\frac{mv_0{}^2}{2}, \tag{140}$$

и чѣмъ меньше v_0, тѣмъ на меньшую высоту поднимется точка надъ плоскостію HH, возвращаясь затѣмъ опять черезъ положеніе A на другую сторону круга, до той же высоты. Въ положеніе же B она попадетъ только когда

$$\frac{mv_0{}^2}{2}\geqq F.2l\,.$$

Итакъ, всякая сообщенная скорость приводитъ точку изъ B въ A, и только опредѣленная скорость приводитъ ее изъ A въ B. Други ми словами, если точка вышла изъ B, то возвратиться туда она можетъ только черезъ A; выйдя же изъ A, она можетъ въ это положеніе возвратиться, не попадая въ B. Положеніе A называется положеніемъ устойчиваго равновѣсія.

§ 36. Устойчивость и неустойчивость равновѣсія взаимныхъ силъ.

Общее условіе равновѣсія силъ, приложенныхъ къ точкамъ данной системы, состоитъ, какъ было объяснено въ § 28, въ томъ, чтобы работа упомянутыхъ сила была меньше или равна нулю при всѣхъ возможныхъ безконечно малыхъ перемѣщеніяхъ системы изъ ея положенія равновѣсія. Если силы, условіе равновѣсія для которыхъ разыскивается, суть взаимныя, то работа этихъ силъ при всякомъ измѣненіи состоянія системы можетъ быть выражена съ помощію соотвѣтствующаго измѣненія потенціальной энергіи П. Дѣйствительно, если П представляетъ величину потенціальной энергіи въ началѣ какого нибудь перемѣщенія системы, а П′ — ея величину въ концѣ перемѣщенія, то разность П — П′ выразитъ очевидно работу, произведенную взаимными силами системы во время упомянутаго перемѣщенія. Но съ другой стороны разность П′— П есть ничто иное, какъ приращеніе потенціальной энергіи на разсматриваемомъ пути. Слѣдовательно работа взаимныхъ силъ, между двумя положеніями точекъ системы, измѣряется отрицательнымъ приращеніемъ потенціальной энергіи (т. е.—(П′— П)) между этими положеніями. Предста-

вляя себѣ два совершенно произвольныя безконечно близкія другъ къ другу размѣщенія точекъ системы, и обозначая черезъ $\delta\Pi$ соотвѣтствующее безконечно малое приращеніе потенціальной энергіи втораго положенія передъ первымъ, мы заключаемъ, что для равновѣсія взаимныхъ силъ въ первомъ изъ упомянутыхъ положеній должно быть

$$-\delta\Pi \leqq 0, \quad \text{т. е.} \quad \delta\Pi \geqq 0, \tag{141}$$

при всякихъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы изъ разсматриваемаго положенія. Итакъ, если мы будемъ перемѣщать точки системы изъ ихъ положенія равновѣсія въ другія возможныя положеженія, безконечно мало разнящіяся отъ перваго, то при всѣхъ такихъ перемѣщеніяхъ потенціальная энергія системы или не должна измѣняться (когда $\delta\Pi = 0$), или должна увеличиваться (когда $\delta\Pi > 0$). Если потенціальная энергія, при переходѣ системы изъ положенія равновѣсія во всевозможныя сосѣднія положенія, увеличивается, то очевидно въ самомъ положеніи равновѣсія величина П есть наименьшая въ сравненіи со смежными положеніями. Разсмотримъ значеніе того случая, когда $\delta\Pi = 0$.

Предположимъ, что величина потенціальной энергіи П, измѣняясь въ зависимости отъ разстояній $r_1, r_2 \ldots r_n$ между точками системы, переходитъ послѣдовательно черезъ рядъ значеній отъ величины Π_1 къ величинѣ Π_2; пусть $d_1\Pi, d_2\Pi, d_3\Pi \ldots$ и т. д. будутъ послѣдовательныя безконечно малыя положительныя или отрицательныя приращенія, которыя, будучи одно за другимъ приложены къ величинѣ Π_1, превращаютъ ее въ Π_2; т. е. пусть

$$\Pi_1 + d_1\Pi + d_2\Pi + \cdots = \Pi_2,$$

при чемъ упомянутыя приращенія имѣютъ мѣсто вслѣдствіе того, что величины $r_1, r_2 \ldots r_n$, отъ которыхъ зависитъ П и съ измѣненіемъ которыхъ оно мѣняется, тоже послѣдовательно возрастаютъ на положительныя или отрицательныя безконечно малыя величины $dr_1, dr_2 \ldots dr_n$. Если П, въ промежуткѣ между своими значеніями Π_1 и Π_2, принимаетъ наибольшую (maximum) или наименьшую (minimum) величину, то послѣдовательныя значенія П:

$$\Pi_1, \quad \Pi_1 + d_1\Pi, \quad \Pi_1 + d_1\Pi + d_2\Pi, \ldots \Pi_1 + d_1\Pi + d_2\Pi + d_3\Pi + \cdots,$$

не могутъ очевидно быть каждое больше предыдущаго или каждое меньше предыдущаго. Дѣйствительно, П переходя черезъ свое наи-

большее или наименьшее значеніе, не можетъ постоянно увеличиваться или постоянно уменьшаться; но должно или сначала увеличиваться, а затѣмъ уменьшаться, или наоборотъ. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ одни изъ приращеній $d_1\Pi$, $d_2\Pi\ldots$ должны быть положительными, а другія—отрицательными, какъ-бы мы ни измѣняли величины r_1, $r_2\ldots r_n$, лишь-бы существовало условіе, что зависящая отъ этихъ послѣднихъ величина П въ упомянутомъ промежуткѣ получаетъ наибольшее или наименьшее значеніе. Такая перемѣна знака у приращеній величины П должна совершаться именно какъ разъ при ея переходѣ черезъ свое наибольшее или наименьшее значеніе. Наоборотъ, если приращенія величины П, при данныхъ безконечно малыхъ измѣненіяхъ положеній точекъ системы (т. е. изъ взаимныхъ разстояній), мѣняютъ свой знакъ съ положительнаго на отрицательный, то величина П переходитъ черезъ maximum; въ противномъ случаѣ, т. е. при перемѣнѣ отрицательнаго знака приращеній на положительный, она переходитъ черезъ minimum.

Если какая нибудь величина, измѣняясь непрерывно, т. е. скачками, которые могутъ быть сдѣланы меньше всякой данной величины, переходитъ отъ своихъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, или наоборотъ, то при этомъ одно изъ ея промежуточныхъ значеній должно быть очевидно нулемъ; хотя наоборотъ—равенство нулю еще не обусловливаетъ необходимо перемѣну знака, ибо, напримѣръ, величина, будучи положительна, можетъ уменьшиться до нуля, а затѣмъ опять возрастать отъ нуля, оставаясь положительною. Слѣдовательно, если величина П переходитъ черезъ maximum или minimum, то ея приращеніе $d\Pi$, мѣняя при этомъ свой знакъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ переходить черезъ нуль; именно, когда это $d\Pi$ вблизи отъ упомянутаго maximum'а или minimum'а измѣняется непрерывно, т. е. такими скачками, которые въ сравненіи съ $d\Pi$ могутъ быть приняты безконечно малыми. Если это послѣднее условіе непрерывности при приближеніи къ max. или minim. не удовлетворено, то $d\Pi$ можетъ при этомъ и не обращаться въ нуль. Дѣйствительно, вообще говоря, можетъ случиться, что, приближаясь къ max. или minim. величины П, съ помощію послѣдовательныхъ безконечно малыхъ измѣненій взаимныхъ положеній точекъ, мы будемъ и величину П измѣнять безконечно малыми скачками на $d\Pi$, но такимъ образомъ, что каждыя послѣдующія $d\Pi$ не будутъ постепенно уменьшаться до нуля; въ такомъ случаѣ, при пе-

реходѣ черезъ max. или minim., $d\Pi$ только перемѣнитъ свой знакъ, но не перейдетъ черезъ нуль; т. е. мы не будемъ въ состоянiи подъискать на данномъ пути такихъ измѣненiй положенiй точекъ системы, при которыхъ соотвѣтственное измѣненiе величины Π было бы равно нулю. Такимъ образомъ, перемѣна знака приращенiя данной величины есть необходимое условiе ея перехода черезъ свое наибольшее или наименьшее значенiе; обращенiе же этого приращенiя въ нуль есть только возможное условiе упомянутаго перехода. Если слѣдовательно мы вообразимъ себѣ нашу систему въ такомъ размѣщенiи, которое соотвѣтствуетъ maxim. или minim. ея потенцiальной энергiи, и будемъ затѣмъ безконечно мало измѣнять это размѣщенiе, то въ случаѣ maxim. необходимо будемъ имѣть отрицательныя приращенiя величины Π, въ случаѣ minim. наоборотъ всѣ возможные $\delta\Pi$ вообще будутъ необходимо положительны; но въ томъ и другомъ случаѣ также возможно, что всѣ или нѣкоторыя изъ $\delta\Pi$ обратятся въ нули.

Для поясненiя предыдущаго обратимся къ случаю маятника, разобраннаго въ послѣднемъ параграфѣ. Если нить маятника не только нерастяжима, но и несгибаема, то масса m можетъ приближаться къ положенiямъ maxim. и minim. потенцiальной энергiи, т. е. къ точкамъ B и A, или отъ нихъ удаляться, только по кругамъ радiуса l, которые будутъ лежать очевидно на сферѣ того же радiуса, касательной въ точкахъ B и A къ плоскостямъ $H'H'$ и HH. Слѣдовательно, если при этихъ условiяхъ мы будемъ выводить систему безконечно мало изъ положенiя max. или min., то точка m будетъ перемѣщаться по элементамъ плоскостей $H'H'$ или HH, которые эти плоскости имѣютъ общими со сферами возможныхъ перемѣщенiй; но такъ какъ при этомъ разстоянiе точки m отъ плоскости не будетъ мѣняться, то ея потенцiальная энергiя при подобныхъ безконечно малыхъ перемѣщенiяхъ не измѣнится, и приращенiя $\delta\Pi$ этой послѣдней слѣдовательно будутъ равны нулю. Но если нить, будучи нерастяжимою, можетъ сгибаться, то точка m можетъ уйти изъ положенiй A или B вдоль по линiи AB. Въ такомъ случаѣ, какъ-бы ни было мало измѣненiе положенiя точки вдоль по упомянутой линiи, оно будетъ сопровождаться соотвѣтственнымъ измѣненiемъ ея разстоянiя отъ плоскости HH, а слѣдовательно и отрицательнымъ или положительнымъ безконечно малымъ приращенiемъ соовѣтственной величины Π, отличнымъ отъ нуля; но знакъ этого

приращенія всегда будетъ отрицательный, если точка выйдетъ изъ B, и положительный, если она выйдетъ изъ A.

Итакъ, обозначая черезъ $\delta\Pi$ безкон. малое приращеніе величины Π, при безконечно маломъ перемѣщеніи системы изъ даннаго положенія по любому изъ возможныхъ для ея точекъ путей, мы заключаемъ, что въ случаѣ, Π max., упомянутое $\delta\Pi$ должно быть или отрицательное, или нуль, т. е.

$$\delta\Pi \leqq 0, \tag{142}$$

а въ случаѣ, Π minim.:

$$\delta\Pi \geqq 0. \tag{143}$$

Сравнивая вышеприведенныя условія maximum'а и minimum'а съ условіемъ равновѣсія,

$$\delta\Pi \geqq 0,$$

мы находимъ, что система, съ наименьшею потенціальною энергіею, всегда удовлетворяетъ условію равновѣсія, а система, съ наибольшею потенціальною энергіею—только тогда, когда, при всѣхъ возможныхъ для нея изъ упомянутаго maximum'а перемѣщеніяхъ, $\delta\Pi = 0$. Слѣдовательно, точки системы никогда не могутъ начать движенія изъ положенія наименьшаго Π безъ дѣйствія внѣшнихъ силъ или безъ заранѣе сообщенныхъ скоростей; т. е. если кинетическая энергія системы въ положеніи, Π minim., есть нуль, то движеніе всегда невозможно. Если система находится въ размѣщеніи, Π maxim., и ея кинетическая энергія при этомъ равна нулю, то иногда движеніе системы невозможно. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, маятникъ не выйдетъ непосредственно изъ положенія B, только если нить несгибаема, вслѣдствіе чего движеніе должно происходить по кругу. Въ противномъ случаѣ положеніе B не будетъ положеніемъ равновѣсія. Вышеизложенныя заключенія, вытекая непосредственно изъ условій равновѣсія, могутъ быть также выведены изъ уравненія сохраненія энергіи,

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \quad \text{при} \quad T_0 = 0. \tag{144}$$

Такъ какъ въ положеніяхъ, безконечно близкихъ къ minim., будетъ

$$\Pi_0 - \Pi \leqq 0, \quad \text{то} \quad T \leqq 0, \tag{145}$$

что указываетъ на отсутствіе и невозможность движенія, ибо T, бу-

дучи всегда существенно положительной величиною, не можетъ сдѣлаться меньше нуля, и обращается въ нуль, когда всѣ члены суммы T, т. е. всѣ скорости, суть нули. Точно также въ случаѣ maxim. будемъ имѣть

$$\Pi_0 - \Pi \overline{\gtrless} 0, \quad \text{и соотвѣтственно: } T = 0, \quad T > 0, \tag{146}$$

т. е. движенія не будетъ только въ случаѣ, когда $\Pi_0 - \Pi = 0$.

Разсмотримъ теперь, каково будетъ движеніе системы, выведенной изъ ея положенія равновѣсія, соотвѣтствующаго max. или min. потенціальной энергіи. Выведена изъ положенія равновѣсія система можетъ быть двоякимъ способомъ: или ея точкамъ будутъ сообщены (конечно внѣшними силами) нѣкоторыя скорости, т. е. нѣкоторое приращеніе кинетической энергіи, или точки системы будутъ передвинуты въ какое либо сосѣднее размѣщеніе безъ сообщенія имъ скоростей, т. е. будетъ измѣнена потенціальная энергія системы. Обратимся сперва къ положенію равновѣсія, соотвѣтствующему наибольшей потенціальной энергіи, т. е. $\Pi_0 = Q$. Если точкамъ системы сообщено нѣкоторое количество кинетической энергіи τ, то во все время движенія должно быть

$$T + \Pi = Q + \tau. \tag{147}$$

Такъ какъ на первыхъ элементахъ движенія, по условію (145), $Q - \Pi = 0$, то $T = \tau$; но затѣмъ Π должно уменьшаться и слѣдовательно T — увеличиваться. Такимъ образомъ для системы будетъ возможно, подъ вліяніемъ первоначальнаго толчка, все большее и большее отступленіе отъ положенія равновѣсія, какъ бы ни былъ малъ этотъ толчекъ, т. е. какъ бы ни была мала величина τ. Поэтому соотвѣтствующее положеніе равновѣсія называется **неустойчивымъ**. Упомянутое выше увеличеніе величины T будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока уменьшающаяся величина Π не перестанетъ получать отрицательныхъ приращеній, и не начнетъ снова увеличиваться, получая уже положительныя приращенія, т. е. пока Π не достигнетъ своей наименьшей величины, при чемъ система пройдетъ черезъ новое положеніе равновѣсія. Но въ этомъ новомъ положеніи равновѣсія система не остановится, ибо ея кинетическая энергія тутъ очевидно не будетъ равна нулю; слѣдовательно, движеніе будетъ продолжаться съ увеличивающейся потенціальною энергіею и уменьшающеюся кинетическою до новой перемѣны знака у

$d\Pi$, когда Π достигаетъ наибольшей величины, а T — наименьшей. Но такъ какъ наименьшая величина T не можетъ быть меньше τ, и T не обратится въ нуль, то движеніе будетъ продолжаться изъ вновь достигнутаго положенія равновѣсія, и т. д. При этомъ нужно замѣтить, что при описанномъ движеніи системы между абсолютными maxim. и minim., соотвѣтствующими равенствамъ $\Pi = Q$ и $\Pi = 0$, величина потенціальной энергіи можетъ принимать рядъ относительныхъ max. и min., соотвѣтствующихъ тоже положеніямъ равновѣсія; но такъ какъ ни въ одномъ изъ этихъ положеній величина T не можетъ обратиться въ нуль, то система въ нихъ останавливаться не будетъ. Примѣръ такого рода относительныхъ maxim. и minim. можемъ видѣть при движеніи точки, подъ дѣйствіемъ постоянной силы, между двумя перпендикулярными къ направленію силы плоскостями $H'H'$ и HH (рис. 64) по кривой $BmMAMnB$, на которой положенія B и A будутъ соотвѣтствовать абсолютнымъ maxim. и minim., положенія M—относительнымъ maxim., а положенія m—относительнымъ minim.

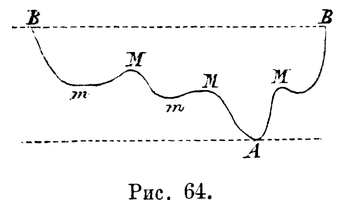


Рис. 64.

Положимъ теперь, что точки системы выведены, безъ сообщенія имъ скоростей, изъ положенія равновѣсія, и притомъ—какъ угодно мало; т. е. пусть Π_0 уменьшится на какъ угодно малую, но отличную отъ нуля величину q; тогда очевидно, система прійдетъ въ движеніе, ибо условія равновѣсія уже не будутъ выполняться, и во время движенія будетъ

$$T + \Pi = Q - q\,, \tag{148}$$

откуда видимъ, что T будетъ увеличиваться до тѣхъ поръ, пока Π не достигнетъ наименьшей величины. Затѣмъ T будетъ уменьшаться и обратится въ нуль, при $\Pi = Q - q$. Дальнѣйшее увеличеніе Π не будетъ возможно, такъ какъ тогда T должно бы было сдѣлаться отрицательнымъ. Но такъ какъ положеніе $\Pi = Q - q$ не удовлетворяетъ условію равновѣсія, то движеніе будетъ продолжаться, и опять повторится уменьшеніе Π и увеличеніе T. Такимъ образомъ, система, разъ выйдя въ данномъ случаѣ изъ положенія неустойчиваго равновѣсія, уже въ него не возвратится.

Предположимъ теперь, что система начинаетъ свое движеніе изъ положенія устойчиваго равновѣсія, съ первоначальною кинети-

ческою энергiею τ, которая можетъ быть предположена какъ угодно малою. Тогда $\Pi_0 = 0$, $T_0 = \tau$, и уравненiе сохраненiя энергiи принимаетъ видъ

$$T + \Pi = \tau, \tag{149}$$

откуда видимъ, что П можетъ увеличиваться только до величины τ, когда T обращается въ нуль, ибо, при $\Pi > \tau$, T должно бы было сдѣлаться отрицательнымъ, что невозможно. Достигнувъ положенiя ($\Pi = \tau$), система въ немъ не останется, ибо условiя равновѣсiя не будутъ удовлетворены, такъ какъ для системы въ этомъ ея положенiи будутъ возможны такiя перемѣщенiя, при которыхъ П будетъ уменьшаться. Итакъ, наступитъ движенiе системы, при которомъ П будетъ уменьшаться, а T увеличиваться до $\Pi = 0$ и $T = \tau$, т. е. до возврата въ положенiе равновѣсiя, изъ котораго система опять выйдетъ, чтобы снова возвратиться, и т. д. Такое положенiе равновѣсiя, въ которое система снова возращается, будучи изъ него выведена, называется устойчивымъ.

Если система будетъ выведена изъ положенiя устойчиваго равновѣсiя безъ сообщенiя ея точкамъ скоростей, и доведена до положенiя, съ потенцiальною энергiею q, а затѣмъ будетъ предоставлена самой себѣ, то во все время движенiя будетъ

$$T + \Pi = q, \tag{150}$$

откуда видимъ, что система опять возвратится въ положенiе $\Pi = 0$, чтобы снова выйти изъ него и дойти до $T = 0$ и $\Pi = q$, и т. д.

§ 37. Превращенiе, передача и трата энергiи.

Всякое движенiе консервативной системы, подъ дѣйствiемъ ея взаимныхъ силъ, мы можемъ разсматривать, какъ послѣдовательное увеличенiе количества энергiи одного вида на счетъ уменьшенiя энергiи другаго вида, т. е. какъ процессъ превращенiя или потенцiальной энергiи въ кинетическую, или наоборотъ. Превращенiе потенцiальной энергiи въ кинетическую имѣетъ очевидно мѣсто, когда силы системы въ общей сложности выполняютъ положительную работу, которая въ этомъ случаѣ тратится на увеличенiе кинетической энергiи, уменьшая запасъ работы, подлежащей выполненiю, т. е. потенцiальную энергiю. Такого рода превращенiе будетъ продолжаться до

тѣхъ поръ, пока потенціальная энергія не уменьшится до minimum'а, какъ это было объяснено въ предыдущемъ параграфѣ. Упомянутый minimum не есть необходимо абсолютный, т. е. не соотвѣтствуетъ самой наименьшей величинѣ потенціальной энергіи системы, какую мы можемъ только себѣ представить; но представляетъ такую величину потенціальной энергіи, которая менѣе, чѣмъ всѣ соотвѣтствующія сосѣднимъ (съ разсматриваемымъ) положеніямъ системы. Другими словами, приращенія потенціальной или кинетической энергіи могутъ перемѣнять свой знакъ не только при абсолютно наибольшихъ или наименьшихъ значеніяхъ соотвѣтствующихъ измѣняющихся величинъ, но и вообще при всякихъ значеніяхъ, лежащихъ между упомянутыми абсолютными max. и min.; такого рода перемѣны знака будутъ обусловливать второстепенныя maxim. и minim. Такимъ образомъ, превращеніе одного вида энергіи въ другой не должно, вообще говоря, продолжаться необходимо до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ видовъ энергіи будетъ вполнѣ исчерпанъ; но при всякомъ движеніи могутъ быть налице нѣкоторыя количества того или другаго вида энергіи, которыя, по условіямъ движенія, никогда не превратятся другъ въ друга.

Такъ, въ пояснительномъ примѣрѣ § 35 мы видѣли, что, при движеніи матеріальной точки, подъ дѣйствіемъ неизмѣнной силы, по кругу, энергія системы можетъ быть больше могущества системы, при чемъ часть энергіи всегда остается въ видѣ кинетической (см. ур. (136)). Другой примѣръ неполнаго превращенія одного вида энергіи въ другой мы можемъ видѣть въ движеніи тѣла около притягивающаго центра, при чемъ движущееся тѣло то приближается къ центру, то отъ него удаляется, какъ при обращеніи земли по эллипсу, въ фокусѣ котораго находится притягивающее солнце. Система, состоящая изъ неподвижнаго центра S (рис. 65) и притягиваемаго имъ тѣла, можетъ очевидно обладать могуществомъ, представляемымъ работою, которую выполнила-бы сила притяженія, при движеніи тѣла E изъ безконечнаго разстоянія отъ S до соприкосновенія E съ S. Но, при данномъ движеніи, наличный запасъ энергіи системы можетъ быть вообще меньше возможнаго могущества системы, которому онъ равнялся-бы, если-бы движеніе началось безъ начальной скорости изъ безконечности. Въ данномъ случаѣ наибольшій запасъ потенціальной энергіи будетъ соотвѣтство-

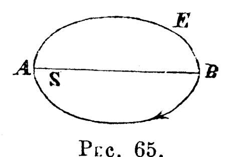


Рис. 65.

вать положенію B, и этотъ запасъ весь превратился-бы въ кинетическую энергію, еслибъ движеніе происходило по линіи BS. При движеніи же вращательномъ только часть этого запаса превращается въ кинетическую энергію на пути между B и A; въ этомъ послѣднемъ положеніи кинет. энергія достигаетъ сравнительно наибольшей величины, а потенц. энергія—наименьшей; затѣмъ, на пути отъ A до B происходитъ обратное превращеніе кинетической энергіи въ потенціальную, и т. д., безъ полнаго превращенія одного вида энергіи въ другой. Если тѣло E движется около S по кругу, то превращеніе энергіи вовсе не имѣетъ мѣста, и количество кинетической энергіи системы во все время движенія остается постояннымъ.

Законъ сохраненія энергіи, утверждая, что уменьшеніе количества одного вида энергіи соотвѣтствуетъ всегда точно такому же приращенію другаго вида, устанавливаетъ количественную эквивалентность обоихъ видовъ энергіи при ихъ превращеніяхъ, не опредѣляя однако, какое количество изъ наличнаго запаса всей энергіи системы подлежитъ превращенію, т. е. какое количество энергіи можетъ въ различные моменты движенія являться въ томъ или другомъ изъ обоихъ видовъ, ибо, какъ мы видѣли изъ предыдущихъ примѣровъ, при одномъ и томъ же количествѣ всей энергіи системы, но при различныхъ родахъ ея движенія, различныя части одного вида энергіи подлежатъ превращенію въ другой, и обратно. Вышеприведенное заключеніе послужитъ намъ впослѣдствіи къ уясненію значенія обоихъ основныхъ законовъ механической теоріи тепла.

Выдѣлимъ мысленно какую нибудь часть изъ консервативной системы и разсмотримъ энергію этой части, т. е. сумму $\Pi + T$. Такъ какъ матеріальныя точки, составляющія выдѣленную часть, подлежатъ дѣйствію не только взаимныхъ силъ между ними, но и силъ, обусловленныхъ остальными точками системы, которыя должны быть разсматриваемы, какъ внѣшнія, по отношенію къ выдѣленной части, то количество энергіи этой части не будетъ оставаться постояннымъ. Дѣйствительно, приращеніе кинетической энергіи разсматриваемой части системы будетъ происходить насчетъ работы не только ея взаимныхъ силъ, но и силъ внѣшнихъ, зависящихъ отъ остальныхъ точекъ системы; первая работа будетъ обусловлена только взаимнымъ расположеніемъ точекъ выдѣленной части; но вторая работа

кромѣ того еще будетъ зависѣть отъ распредѣленія точекъ остальной части. Слѣдовательно, при движеніи точекъ выдѣленной части отъ одного ихъ взаимнаго распредѣленія къ другому, не будетъ всегда одно и тоже приращеніе кинетической энергіи этой части, ибо при этомъ распредѣленіе разсматриваемыхъ точекъ, по отношенію къ остальнымъ частямъ системы, можетъ быть различно. Итакъ, энергія каждой отдѣльно взятой части консервативной системы можетъ, во время движенія этой послѣдней, увеличиваться или уменьшаться. Но такъ какъ при этомъ количество энергіи всей системы должно оставаться неизмѣннымъ, то очевидно, увеличеніе энергіи одной части системы должно происходить на счетъ ея уменьшенія въ другихъ частяхъ системы. Такимъ образомъ мы приходимъ къ представленію о передачѣ, распростаненіи, или переходѣ энергіи изъ одной части системы въ другую, или вообще—изъ одной части пространства въ другую, т. е.—къ представленію о движеніи энергіи. Если наоборотъ въ какой нибудь части разсматриваемой системы количество энергіи остается неизмѣннымъ во все время движенія, то мы должны заключить, что въ этой части системы существуютъ только взаимныя силы между составляющими ее матеріальными точками, и что остальныя части системы не оказываютъ вліянія на разсматриваемыя точки, т. е. какъ-бы для нихъ не существуютъ. Вообще мы только тогда будемъ имѣть систему матеріальныхъ точекъ съ постояннымъ количествомъ энергіи, когда примемъ въ расчетъ всѣ части наблюдаемой нами матеріи, могущія какимъ либо образомъ дѣйствовать другъ на друга, т. е. когда мы включимъ въ нашу систему весь познаваемый нами матеріальный міръ. Для отдѣльныхъ частей опредѣленнаго такимъ образомъ міра сохраненіе энергіи не можетъ имѣть мѣста, ибо въ такомъ случаѣ часть, съ неизмѣннымъ количествомъ энергіи, не претерпѣвая никакого дѣйствія отъ остальныхъ частей и сама на нихъ не воздѣйствуя, не существовала бы физически для наблюдателя внѣ ея, и представляла бы собою весь міръ для наблюдателя внутри ея, при чемъ конечно наблюдатель разсматривается, какъ часть системы, подверженная тѣмъ или другимъ дѣйствіямъ остальныхъ частей.

Каждое изъ нашихъ отдѣльныхъ непосредственныхъ наблюденій можетъ относиться къ явленіямъ, обнимающимъ только ту или другую малую часть всего міра. Поэтому мы не можемъ ни наблюдать, ни представлять себѣ никакого процесса природы, происходящаго въ

ограниченномъ пространствѣ такъ, чтобы количество проявляющейся при этомъ процессѣ энергіи оставалось-бы всегда одно и тоже. То что мы въ дѣйствительности наблюдаемъ—есть тотъ или другой моментъ взаимнаго превращенія разныхъ видовъ энергіи другъ въ друга, при чемъ количества энергіи того и другаго вида должны быть эквавалентны между собою. Такимъ образомъ, всякое движеніе, наблюдаемое или представляемое нами въ какой либо системѣ матеріальныхъ точекъ, не обнимающей собою всего міра, должно быть связано съ уменьшеніемъ или увеличеніемъ энергіи упомянутой системы. Это измѣненіе энергіи наблюдаемой системы можетъ происходить или непрерывно, или скачками, можетъ состоять въ измѣненіи одной только потенціальной энергіи, или одной кинетической, или обѣихъ заразъ. Другими словами, если мы обозначимъ черезъ E и E' количества энергіи системы соотвѣтственно для двухъ безконечно близкихъ моментовъ времени, то разность $E'-E$ можетъ быть тоже безконечно мала, какъ въ случаѣ непрерывнаго измѣненія энергіи, или $E'-E$ можетъ быть конечною величиною, если энергія измѣняетъ свою величину скачками. Кромѣ того, обозначая черезъ T и Π и черезъ T' и Π' количества кинетической и потенціальной энергіи системы для перваго и втораго изъ двухъ вышеупомянутыхъ моментовъ времени, мы имѣемъ очевидно:

$$T+\Pi=E \quad \text{и} \quad T'+\Pi'=E', \tag{151}$$

вслѣдствіе чего приращеніе энергіи системы опредѣлится слѣдующимъ образомъ:

$$E'-E=T'-T+\Pi'-\Pi, \tag{152}$$

при чемъ является очевиднымъ значеніе частныхъ случаевъ, когда происходитъ измѣненіе или одной потенціальной энергіи, или одной кинетической, т. е. когда $T'=T$, или $\Pi'=\Pi$.

Измѣненіе одной только потенціальной энергіи можетъ быть произведено, когда къ точкамъ системы будутъ приложены внѣшнія силы, уравновѣшивающія внутреннія взаимныя силы системы во всякій моментъ движенія этой послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ δL работу упомянутыхъ внѣшнихъ силъ, при какомъ-либо возможномъ безконечно маломъ измѣненіи распредѣленія точекъ системы изъ ихъ размѣщеній въ какой-либо моментъ времени, и помня, что отрицательное приращеніе $-\delta\Pi$ потенціальной энергіи системы,

при тѣхъ-же перемѣщеніяхъ, представитъ соотвѣтствующую работу внутреннихъ силъ, мы будемъ имѣть, на основаніи § 28, (76), слѣдующее условіе равновѣсія внѣшнихъ и внутреннихъ силъ для каждаго момента времени:

$$\delta L - \delta \Pi \leqq 0. \tag{153}$$

Обозначимъ черезъ dL и $d\Pi$ работу внѣшнихъ и внутреннихъ силъ для дѣйствительныхъ безконечно малыхъ перемѣщенія точекъ системы. Если эти перемѣщенія обращаемы, т. е. если рядомъ съ ними возможны также другія перемѣщенія, имъ прямо противоположныя, то условіе (153) для такихъ перемѣщеній обращается въ

$$dL - d\Pi = 0. \tag{154}$$

Но при движеніи системы должно выполняться условіе (120), которое представится въ видѣ:

$$dL - d\Pi - dT = 0\,, \tag{155}$$

гдѣ dT представляетъ приращеніе кинетической энергіи системы. На основаніи (155) и (154) имѣемъ, что

$$dT = 0\,,$$

т. е. что кинетическая энергія, не получая приращенія, остается неизмѣнною во все время движенія. Кромѣ того изъ условія

$$d\Pi = dL \tag{154}$$

видно, что, если движеніе системы происходитъ въ сторону внѣшнихъ силъ, т. е. если работа этихъ послѣднихъ, dL, на каждомъ элементѣ перемѣщенія опредѣляется положительною, то приращеніе $d\Pi$ потенціальной энергіи системы будетъ тоже положительно, т. е. эта энергія будетъ увеличиваться на счетъ работы внѣшнихъ силъ; въ обратномъ случаѣ, когда движеніе таково, что работа dL отрицательна, потенціальная энергія системы будетъ уменьшаться, затрачиваясь на работу противъ внѣшнихъ силъ. Въ первомъ случаѣ внѣшняя работа тратится на увеличеніе энергіи системы; во второмъ случаѣ выигрывается внѣшняя работа насчетъ затраченной энергіи. Если внѣшнія силы, по выполненіи ими нѣкоторой положительной или отрицательной работы, перестаютъ дѣйствовать на точки системы, то движеніе этой послѣд-

ней продолжается съ постоянною энергіею, но измѣненною противъ той, которая имѣла мѣсто до начала дѣйствія внѣшнихъ силъ.

Если внѣшнія силы приложены описаннымъ способомъ къ точкамъ системы въ тотъ моментъ ихъ движенія, когда кинетическая энергія равна нулю, то эта послѣдняя очевидно останется равною нулю во все время, пока дѣйствуютъ внѣшнія силы; т. е. система будетъ въ покоѣ. Но въ такомъ случаѣ, при неизмѣнномъ распредѣленіи точекъ системы, ея потенціальная энергія останется неизмѣнною. Однако при этомъ достаточно сообщить системѣ какъ угодно малый запасъ кинетической энергіи, чтобы тѣмъ вызвать непрерывное превращеніе внѣшней работы въ потенціальную энергію, или наоборотъ. Увеличеніе потенціальной энергіи произойдетъ, когда сообщенныя скорости будутъ направлены въ сторону дѣйствія внѣшнихъ силъ; уменьшеніе—когда упомянутыя скорости обусловятъ движеніе противъ дѣйствія внѣшнихъ силъ.

Слѣдующіе простые примѣры могутъ пояснить намъ разъясненный выше способъ измѣненія потенціальной энергіи системы внѣшними силами. 1) Камень подымается равномѣрно рукою надъ поверхностію земли, при чемъ, во все время движенія камня вверхъ рука уравновѣшиваетъ силу тяжести, работа-же руки увеличиваетъ потенціальную энергію системы изъ земли и камня; скорость сообщается камню рукою при началѣ движенія, и во все время поднятія остается неизмѣнною. 2) Точно также, работа руки увеличиваетъ потенціальную энергію системы, когда рука отклоняетъ маятникъ изъ положенія устойчиваго равновѣсія, не сообщая ему при этомъ скорости или когда 3) рука завертываетъ пружину, при чемъ сила руки во все время завертыванія уравновѣшиваетъ постепенно возрастающую упругую силу пружины.

Измѣненіе одной только кинетической энергіи системы, независимо отъ потенціальной, мы можемъ представить себѣ очевидно только мгновеннымъ, и слѣдовательно обусловленнымъ нѣкоторымъ импульсомъ мгновенныхъ силъ, или столкновеніемъ матеріальныхъ точекъ данной системы съ точками другой. Продолжительность импульса или столкновенія должна быть при этомъ представлена на столько малою, что въ продолженіи времени дѣйствія мгновенныхъ силъ положеніе частей системы не успѣетъ конечнымъ образомъ измѣнится; не измѣнится слѣдовательно и потенціальная энергія; кинетическая же энергія системы получитъ внезапно нѣкоторое конечное положи-

тельное или отрицательное приращеніе. Въ случаѣ данныхъ импульсовъ упомянутое приращеніе кинетической энергіи опредѣлится по § 33, (121)'' уравненіемъ

$$T - T_0 = \frac{1}{2}\sum J[V_0 \cos(J, V_0) + V \cos(J, V)]. \qquad (155)$$

Въ случаѣ столкновенія приращеніе $T - T_0$ опредѣлится на основаніи соображеній, съ сущностію которыхъ мы познакомимся при изслѣдованіи соудареній твердыхъ тѣлъ.

Всякое наблюдаемое нами явленіе мы тогда считаемъ вполнѣ понятнымъ, когда оно можетъ быть сведено къ ряду простѣйшихъ явленій движенія матеріи. Тѣ явленія, которыя могутъ быть объяснены подобнымъ образомъ, составляютъ предметъ физики. Сложность явленія такимъ образомъ зависитъ отъ сложности тѣхъ движеній, которыми оно можетъ быть объяснено. Движеніе-же мы можемъ разсматривать или какъ измѣненіе положенія частей матеріи, составляющей данную систему, или какъ процессъ превращенія энергіи и ея передачи изъ одного мѣста въ другое.

Если движеніе системы намъ извѣстно вполнѣ, т. е. если мы для каждаго времени можетъ указать мѣсто въ пространствѣ для каждой частицы наблюдаемой системы, то мы будемъ въ состояніи очевидно также найти для каждаго времени и мѣста количество энергіи того и другаго вида, и слѣдовательно рѣшить вопросъ о передачѣ и превращеніи энергіи. Но наоборотъ, если мы знаемъ, какое количество того или другаго вида превращается одно въ другое въ данной части системы или передается другимъ частямъ, т. е. если для насъ рѣшенъ вопросъ о передачѣ и превращеніи энергіи, то изъ этого еще не слѣдуетъ, что мы всегда въ состояніи идти дальше и рѣшить вопросъ о движеніи каждой частицы разсматриваемой системы.

При однихъ явленіяхъ, какъ напримѣръ, звуковыхъ и отчасти свѣтовыхъ, мы можетъ вполнѣ представить себѣ тѣ движенія, которыя въ этихъ явленіяхъ проявляются. При другихъ явленіяхъ, какъ напримѣръ—тепловыхъ, электрическихъ, магнитныхъ, мы можемъ представить себѣ только измѣненія энергіи и ея перемѣщенія, соотвѣтствующія упомянутымъ явленіямъ, не зная почти ничего о со-

отвѣтственномъ движеніи въ собственномъ смыслѣ, по недостатку фактовъ, которые помогли-бы намъ сдѣлать какія-либо заключенія въ этомъ направленіи.

§ 38. Передача энергіи машинами.

Представимъ себѣ нѣкоторую матеріальную систему, которая движется подъ дѣйствіемъ силъ, взаимно уравновѣшивающихся для каждаго момента времени движенія; кромѣ того движеніе системы пусть будетъ обращаемое, т. е. пусть каждому ряду дѣйствительныхъ перемѣщеній частей системы соотвѣтствуетъ рядъ прямо противоположныхъ возможныхъ перемѣщеній. При такихъ условіяхъ, работа всѣхъ вышеупомянутыхъ взаимно уравновѣшивающихся силъ во все время движенія системы должна быть равна нулю, а кинетическая энергія системы должна оставаться неизмѣнною.

Такого рода движущаяся система представляетъ собою общій типъ машины. Такъ какъ сумма работъ силъ, приложенныхъ къ машинѣ, должна быть равна нулю, то работа однѣхъ изъ этихъ силъ будетъ положительная, а работа другихъ—отрицательная. Силы, приложенныя къ машинѣ и выполняющія во время ея движенія положительную работу, называются двигателями; силы, выполняющія въ тоже время отрицательную работу, называются сопротивленіями. Двигатели направлены вообще подъ острыми углами къ движенію тѣхъ частей, къ которымъ они приложены; сопротивленія образуютъ вообще тупые углы съ направленіями движенія соотвѣтствующихъ частей машины. Двигатели очевидно не обусловливаютъ непосредственно никакихъ измѣненій въ движеніи машины, кинетическая энергія которой остается постоянною; роль двигателей состоитъ въ томъ, чтобы во все время движенія машины уравновѣшивать сопротивленія, или побѣждать сопротивленія. Роль машины состоитъ въ томъ, чтобы осуществить условія, при которыхъ работа двигателей можетъ быть превращена въ полезную работу, побѣждающую работу сопротивленій.

Обозначая черезъ dL_m элементарную работу двигателя, совершаемую въ теченіи элемента времени, при безконечно маломъ перемѣщеніи частей машины, черезъ dL_r—соотвѣтствующую элементарную работу сопротивленій, и черезъ dT—приращеніе кинетической

энергіи машины, мы будемъ имѣть слѣдующее условіе обращаемаго движенія (см. 120):

$$dL_m + dL_r + dT = 0, \tag{156}$$

при чемъ, вслѣдствіе равновѣсія двигателей и сопротивленій:

$$dL_m + dL_r = 0, \tag{157}$$

и слѣдовательно

$$dT = 0; \tag{158}$$

т. е. кинетическая энергія машины остается неизмѣнною (получаетъ приращенія равныя нулю), и во все время движенія, по (157), работа двигателей равна и противоположна работѣ сопротивленій.

Кромѣ силъ двигателей и сопротивленій, которыя по нашему произволу могутъ быть приложены къ машинѣ, или нѣтъ, всегда существуютъ еще силы, не подлежащія нашему произволу, существованіе которыхъ обусловлено существованіемъ самой машины. Эти силы направлены всегда, какъ показываетъ опытъ, противъ движенія частей машины и потому называются **вредными сопротивленіями**. Обозначая черезъ dL' элементарную работу вредныхъ сопротивленій (по предыдущему—всегда отрицательную) при безконечно маломъ обращаемомъ перемѣщеніи машины, мы должны, принимая во вниманіе эту вредную работу, представить условіе движенія въ слѣдующемъ видѣ:

$$dL_m + dL_r + dL' + dT = 0\,, \tag{159}$$

откуда видимъ, что постоянство кинетической энергіи машины будетъ имѣть мѣсто при слѣдующемъ условіи равновѣсія:

$$dL_m + dL_r + dL' = 0\,, \tag{160}$$

т. е. когда работа двигателей тратится на побѣжденіе не только внѣшнихъ, полезныхъ сопротивленій, но и вредныхъ.

Силы, дѣйствующія на части машины должны очевидно обусловливаться присутствіемъ какой-либо матеріальной системы, такъ или иначе связанной съ машиною. Разсматривая машину и матеріальную систему, обусловливающую двигатели, какъ одно цѣлое, мы будемъ имѣть нѣкоторую матеріальную систему, къ которой приложены внѣшнія силы (сопротивленія), совершающія во время движенія системы отрицательную работу. Такой случай былъ разсмотрѣнъ въ предыдущемъ параграфѣ, гдѣ было указано, что онъ соотвѣтствуетъ умень-

шенію энергіи системы, къ которой приложены силы, совершающія отрицательную работу. Такъ какъ энергія машины остается постоянною, то работа, затрачиваемая на побѣжденіе сопротивленій, получается на счетъ убыли энергіи той системы, которая обусловливаетъ двигатели и которая можетъ быть названа резервуаромъ полезной работы. Роль машины такимъ оброзомъ состоитъ въ томъ, чтобы энергію упомянутаго резервуара превращать въ полезную работу противъ сопротивленій.

Съ другой стороны, мы можемъ разсматривать какъ одно цѣлое машину и ту систему, которая обусловливаетъ существованіе сопротивленія. Въ такомъ случаѣ внѣшнія силы, приложенныя къ разсматриваемой системѣ (т. е. наши двигатели), совершая положительную работу, увеличиваютъ энергію системы. Такимъ образомъ вообще машина является посредникомъ, перемѣщающимъ энергію отъ одной системы къ другой и превращающимъ переносимую энергію въ опредѣленный видъ.

ГЛАВА III.

ДѢЙСТВІЕ СИЛЪ НА ТВЕРДЫЯ ТѢЛА (ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ).

А) РАВНОВѢСІЕ ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ (СТАТИКА).

§ 39. Равновѣсіе свободнаго твердаго тѣла.

Подъ твердымъ тѣломъ въ настоящей главѣ подразумѣвается въ строгомъ смыслѣ неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ, т. е. такая система, точки которой не могутъ измѣнять своихъ взаимныхъ разстояній. Твердое тѣло будетъ **свободнымъ**, когда для какой либо изъ его точекъ возможны всякія поступательныя движенія, и кромѣ того для всего тѣла возможны всѣ вращенія около этой точки. Неизмѣняемость разстояній между частицами абсолютно твердаго тѣла приводотъ къ тому заключенію, что какія-бы взаимныя силы ни дѣйствовали между этими частицами, онѣ должны оставаться въ равновѣсіи, ибо упомянутыя силы всегда направлены по неизмѣннымъ разстояніямъ между частицами. Такимъ образомъ, дѣйствіе внѣшнихъ силъ на твердое тѣло должно состоять только въ измѣненіи величины и момента количества движенія, ибо всякія другія дѣйствія внѣшнихъ силъ, помимо упомянутыхъ измѣненій, совпадая очевидно по направленію съ дѣйствіями взаимныхъ силъ (которыя, по § 21, § 24, не производятъ такихъ измѣненій), должны взаимно уравновѣшиваться, на основаніи неизмѣнности разстояній между точками системы. Слѣдовательно наоборотъ, внѣшнія силы, приложенныя къ точкамъ твер-

даго тѣла (или къ точкамъ, неизмѣнно съ нимъ соединеннымъ), тогда находятся въ равновѣсіи, когда ихъ направленія совпадаютъ съ направленіемъ какихъ-либо равнодѣйствующихъ воображаемыхъ взаимныхъ силъ между точками разсматриваемой неизмѣнной системы, т. е. когда данныя силы могутъ быть разложены на рядъ составляющихъ, направленныхъ по разстояніямъ между точками системы, и попарно противоположныхъ и равныхъ. Но мы знаемъ, что если силы удовлетворяютъ вышеизложеннымъ условіямъ, то (§ 21, § 24) ихъ геометрическая сумма и ихъ моментъ около всякаго начала равны нулю. Слѣдовательно, обозначая черезъ ΣF геометрическую сумму силъ, а черезъ ΣM—геометрическую сумму ихъ моментовъ около произвольно выбраннаго начала, мы будемъ имѣть слѣдующія условія равновѣсія:

$$\Sigma F = 0\,, \qquad \Sigma M = 0\,. \tag{1}$$

Если подъ ΣM, мы будемъ подразумѣвать моментъ около любаго начала, который всегда равенъ нулю, то второе изъ ур. (1) заключить въ себѣ также и условіе $\Sigma F = 0$, ибо, по § 23, (30), можно положить:

$$\Sigma M = M' + \mathfrak{M}\,;$$

а эта величина обращается въ нуль для всякаго начала тогда только, когда отдѣльно $\mathfrak{M} = 0$ и $M' = 0$, ибо $\mathfrak{M}$ остается для всякаго начала неизмѣнно, а M' мѣняется; но M', представляя моментъ геометрической суммы силъ, только тогда равно нулю для всякаго начала, когда сама эта сумма есть нуль.

Къ тѣмъ же самымъ уравненіямъ (1) мы прійдемъ, если будемъ выводить условія равновѣсія изъ принципа возможныхъ перемѣщеній, изложеннаго въ § 28 и выраженнаго ур. (76). Пусть X, Y, Z будутъ слагающія, по нѣкоторымъ прямоугольнымъ осямъ, отъ силы, приложенной къ нѣкоторой точкѣ даннаго твердаго тѣла, координаты которой суть x, y, z. Для различныхъ точекъ значенія X, Y, Z, x, y, z очевидно должны предполаться вообще различными. Форма и положеніе твердаго тѣла будутъ намъ извѣстны, когда мы будемъ знать координаты каждой изъ его точекъ; по измѣненію величины упомянутыхъ координатъ мы можемъ судить о перемѣщеніяхъ твердаго тѣла. Но вслѣдствіе неизмѣняемости разстояній между точками твердаго тѣла, для нихъ возможны не всякія произвольныя измѣненія координатъ, а только тѣ, которыя соотвѣтствуютъ поступатель-

нымъ или вращательнымъ движеніямъ тѣла, т. е. единственно возможнымъ для него перемѣщеніямъ. Итакъ предположимъ, что твердое тѣло всѣми своими точками передвинулось безконечно мало по какому нибудь направленію; тогда каждыя три координаты каждой изъ точекъ тѣла измѣнятся на безконечно малыя положительныя или отрицательныя величины.

$$\delta a, \quad \delta b, \quad \delta c, \tag{2}$$

придавая которымъ всевозможныя (безк. малыя) значенія, мы исчерпаемъ всѣ возможныя безконечно малыя поступательныя перемѣщенія неизмѣняемой системы. Предполагая затѣмъ, что твердое тѣло повернулось на произвольно выбранные безконечно малые углы $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, соотвѣтственно около трехъ осей координатъ, мы найдемъ (§ 31, (101)), что координаты x, y, z какой нибудь точки измѣнятся соотвѣтственно на безконечно малыя величины

$$y\delta\gamma - z\delta\beta, \quad z\delta\alpha - x\delta\gamma, \quad x\delta\beta - y\delta\alpha, \tag{3}$$

при чемъ множители $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ будутъ очевидно одни и тѣже для всѣхъ точекъ разсматриваемой системы. Придавая упомянутымъ множителямъ всевозможныя безконечно малыя значенія, мы исчерпаемъ для каждой точки всѣ возможныя для нея безконечно малыя перемѣщенія, обусловливаемыя различными вращеніями системы около различныхъ осей, проходящихъ черезъ начало координатъ. Такъ какъ любое перемѣщеніе системы можетъ быть представлено, какъ комбинація поступательнаго и вращательнаго движеній, то приращенія δx, δy, δz координатъ x, y, z какой либо точки системы, при любомъ перемѣщеніи этой послѣдней, выразятся суммою приращеній (2) и (3), т. е. будутъ:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta a + y\delta\gamma - z\delta\beta, \\ \delta y &= \delta b + z\delta\alpha - x\delta\gamma, \\ \delta z &= \delta c + x\delta\beta - y\delta\alpha \text{ *)}. \end{aligned} \tag{4}$$

---

*) Положимъ вообще, что точки какой либо системы получаютъ конечный рядъ безконечно малыхъ перемѣщеній, характеризуемыхъ приращеніями $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ координатъ x, y, z какой либо точки, для перваго перемѣщенія, приращеніями $\delta_2 x$, $\delta_2 y$, $\delta_2 z$—для втораго перемѣщенія, и т. д. Положимъ далѣе, что

$$\begin{aligned} \delta_1 x &= l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, & \delta_2 x &= \lambda_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ \delta_1 y &= l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z, & \delta_2 y &= \lambda_2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ \delta_1 z &= l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z, & \delta_2 z &= \lambda_3 + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

Припоминая общее условіе равновѣсія,

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\underset{<}{=}} 0,$$

и подставляя въ него величины (4), мы находимъ:

$$\begin{aligned} &\delta a\,\Sigma X + \delta b\,\Sigma Y + \delta c\,\Sigma Z \\ &+ \delta\alpha\,\Sigma(Yz - Zy) + \delta\beta\,\Sigma(Zx - Xz) + \delta\gamma\,\Sigma(Xy - Yx) \overline{\underset{<}{=}} 0, \end{aligned}$$

откуда, вслѣдствіе совершенной произвольности величинъ δa, δb .. $\delta\alpha$, $\delta\beta$ . . . выводимъ слѣдующія уравненія равновѣсія:

$$\begin{aligned} &\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \\ &\Sigma(Yz - Zy) = 0, \quad \Sigma(Zx - Xz) = 0, \quad \Sigma(Xy - Yx) = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Но первыя три изъ предыдущихъ уравненій выражаютъ, что всѣ три слагающія по осямъ координатъ геометрической суммы всѣхъ приложенныхъ силъ равны каждая нулю, вслѣдствіе чего очевидно должна быть равна нулю и сама упомянутая геометрическая сумма. Послѣднія три изъ предыдущихъ уравненій выражаютъ, что каждый изъ трехъ слагающихъ моментовъ силъ около осей координатъ равенъ нулю (сравн. (32), § 23), вслѣдствіе чего и самый этотъ моментъ,

---

и т. д. Тогда въ результатѣ всѣхъ этихъ перемѣщеній будетъ такое измѣненіе координатъ разсматриваемой точки:

$$\delta x = \delta_1 x + \delta_2 x + \cdots, \qquad \delta y = \delta_1 y + \delta_2 y + \cdots, \qquad \delta z = \delta_1 z + \delta_2 z + \cdots,$$

независимо отъ того, произойдутъ-ли перемѣщенія 1, 2 . . . заразъ, или послѣдовательно, при чемъ конечно величины λ, α, β, . . . l, a, b . . . предполагаются безконечно малыми, а число приращеній δ_1, δ_2 и т. д.—конечнымъ. Дѣйствительно, предполагая, что сперва произошло перемѣщеніе δ_1 и затѣмъ перемѣщеніе δ_2, мы получимъ окончательное приращеніе въ видѣ:

$$\begin{aligned} \delta_1 x + \delta_2 (x + \delta_1 x) &= l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ &+ \lambda_1 + \alpha_1 (x + \delta_1 x) + \beta_1 (y + \delta_1 y) + \gamma_1 (z + \delta_1 z) \\ &= l_1 + \lambda_1 + (a_1 + \alpha_1)\, x + (b_1 + \beta_1)\, y + (c_1 + \gamma_1)\, z \\ &= \delta_1 x + \delta_2 x, \end{aligned}$$

ибо произведенія $\alpha_1 \delta_1 x$, $\beta_1 \delta_1 y$ . . . суть безконечно малы въ сравненіи съ $(a_1 + \alpha_1)$, $(b_1 + \beta_1)$ . . . Точно также докажемъ вообще, что

$$\begin{aligned} &\delta_1 x + \delta_2 (x + \delta_1 x) + \delta_3 [x + \delta_1 x + \delta_2 (x + \delta_1 x)] \\ &+ \delta_4 \{x + \delta_1 x + \delta_2 (x + \delta_1 x) + \delta_3 [\quad]\} + \cdots = \delta_1 x + \delta_2 x + \delta_3 x + \delta_4 x + \cdots \end{aligned}$$

лишь-бы число приращеній δ_1, δ_2 . . . не было безконечно велико.

т. е. геометрическая сумма моментовъ всѣхъ данныхъ силъ, долженъ быть равенъ нулю. Итакъ, урр. (5) выражаютъ прежде найденное нами условіе (1).

§ 40. Сложеніе силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

Подъ сложеніемъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, разумѣется разысканіе одной или нѣсколькихъ такихъ силъ, которыя замѣняли-бы данныя силы по своимъ дѣйствіямъ. Такъ какъ дѣйствіе силъ на твердое тѣло состоитъ только въ измѣненіи величины и момента его количества движенія, то всякія другія силы, производящія тѣже самыя измѣненія упомянутыхъ величинъ, будутъ равнодѣйствующими данныхъ. Но свободное твердое тѣло, по отношенію къ возможнымъ перемѣщеніямъ своихъ точекъ, выполняетъ тѣ условія, при которыхъ, по § 31, измѣненіе величины количества движенія измѣряется геометрическою суммою приложенныхъ силъ, а измѣненіе момента количества движенія—моментомъ приложенныхъ силъ. Слѣдовательно всякія силы, геометрическая сумма которыхъ и моментъ около произвольнаго начала будутъ равны геометрической суммѣ и соотвѣтствующему моменту данныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, будутъ равнодѣйствующими этихъ послѣднихъ. Такимъ образомъ, если мы черезъ $F_1, F_2 \ldots$ обозначимъ данныя силы, приложенныя къ твердому тѣлу, черезъ $M_1, M_2 \ldots$—ихъ моменты около нѣкотораго произвольно выбраннаго начала, черезъ $F_1', F_2' \ldots$ и $M_1', M_2' \ldots$ — равнодѣйствующія силы и ихъ моменты около того-же начала, то должны будутъ удовлетворяться слѣдующія условія:

$$\Sigma F = \Sigma F', \qquad \Sigma M = \Sigma M', \tag{6}$$

гдѣ суммы берутся геометрически. При этомъ очевидно также, что силы, равныя и противоположныя найденнымъ равнодѣйствующимъ, будутъ уравновѣшивать данныя силы $F_1, F_2 \ldots$, ибо геометрическая сумма и моментъ такихъ противоположныхъ силъ будутъ $-\Sigma F'$ и $-\Sigma M'$; сумма же и моментъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло будутъ

$$\Sigma F \sim \Sigma F' \quad \text{и} \quad \Sigma M \sim \Sigma M',$$

и обратятся, вслѣдствіе (6), въ нули; т. е. удовлетворятъ условію равновѣсія (1).

Изъ § 23 мы знаемъ, что для всякой данной системы силъ могутъ быть подобраны по крайней мѣрѣ три силы (вообще вектора), которыхъ моментъ будетъ равенъ моменту данныхъ силъ. Одна изъ упомянутыхъ трехъ силъ равна по величинѣ и направленію геометрической суммѣ данныхъ силъ и проходитъ черезъ такую точку, моментъ данныхъ силъ около которой совпадаетъ по направленію съ этой геометрической суммой; другія двѣ силы лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ первой, и составляютъ пару, моментъ которой равенъ моменту данныхъ силъ около упомянутой выше точки или, что все равно,—около направленія первой силы, какъ оси. Такъ какъ очевидно, геометрическая сумма трехъ упомянутыхъ силъ будетъ кромѣ того равна геометрической суммѣ данныхъ силъ, то первыя представятъ систему изъ наименьшаго возможнаго числа равнодѣйствующихъ послѣднихъ. Итакъ, всякая система силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, можетъ быть во всѣхъ отношеніяхъ замѣнена по крайней мѣрѣ одною силою и къ ней перпендикулярною парою. Такимъ образомъ мы видимъ, что способъ замѣны одной системы силъ другою, ей равнодѣйствующею, заключается для даннаго случая въ выраженіи (30), (§ 23):

$$M = M' + \mathfrak{M}, \tag{4}$$

при чемъ очевидно, что геометрическая сумма силъ, имѣющихъ моментъ M, равна геометрическнй суммѣ силъ, имѣющихъ моментъ $M' + \mathfrak{M}$, ибо въ § 23 было указано, что геометрическая сумма силъ момента M' можетъ быть сдѣлана равною нулю, а геометрическія суммы силъ, имѣющія моменты M и $\mathfrak{M}$, суть однѣ и тѣже, но приложены къ разнымъ точкамъ. Точно также легко видѣть, на основаніи § 23, что данная система силъ можетъ быть замѣнена двумя взаимно перпендикулярными силами, приложенными къ двумъ различнымъ точкамъ.

Изъ вышеприведеннаго непосредственно слѣдуютъ заключенія о слѣдующихъ частныхъ случаяхъ.

1) Всякая сила, приложенная къ твердому тѣлу, можетъ быть замѣнена равною ей силою, приложенною гдѣ либо по той-же прямой линіи, какъ первая.

2) Силы, направленія дѣйствія которыхъ встрѣчаются въ одной точкѣ, могутъ быть замѣнены ихъ геометрической суммой, приложенной къ упомянутой точкѣ.

3) Двѣ параллельныя силы замѣняются одною, равною ихъ алгебраической суммѣ, и приложенною вдоль по линіи, раздѣляющей разстояніе между обѣими точками приложенія данныхъ силъ, внутренно или внѣшне, обратно пропорціонально величинамъ этихъ силъ. Внутреннее дѣленіе соотвѣтствуетъ случаю силъ, направленныхъ въ одну сторону, внѣшнее—въ разныя стороны.

4) Двѣ равныя параллельныя силы, направленныя въ разныя стороны, составляютъ *пару силъ* и не могутъ быть замѣнены одною силою.

5) Точка пересѣченія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ и линіи, соединяющей точки приложенія этихъ послѣднихъ, не завися отъ направленія слагающихъ, останется таже самая для всякихъ взаимно параллельныхъ силъ, проходящихъ черезъ однѣ и тѣже точки приложенія.

6) Точка приложенія равнодѣйствующей двухъ одинаково направленныхъ параллельныхъ силъ, дѣля разстояніе между обѣими данными точками приложенія въ обратномъ отношеніи къ величинамъ силъ, совпадаетъ, по § 22, съ центромъ инерціи двухъ массъ, помѣщенныхъ въ упомянутыхъ точкахъ и пропорціональныхъ по своей величинѣ соотвѣтствующимъ силамъ.

7) Равнодѣйствующая нѣсколькихъ равнонаправленныхъ параллельныхъ силъ легко найдется послѣдовательнымъ сложеніемъ, и будетъ равна по величинѣ суммѣ данныхъ силъ. Ея точка приложенія совпадетъ съ центромъ инерціи воображаемыхъ массъ, пропорціональныхъ даннымъ силамъ и размѣщенныхъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ приложенія. Такая точка, не измѣняющая своего положенія съ измѣненіемъ направленія параллельныхъ силъ, проходящихъ черезъ тѣже точки приложенія и сохраняющихъ свои величины, называется *центромъ параллельныхъ силъ*.

Сила, равная и прямо противоположная равнодѣйствующей, должна очевидно уравновѣшивать данныя слагающія, и слѣдовательно, вмѣстѣ съ этими послѣдними—удовлетворять условіямъ равновѣсія (5). Поэтому, если X_0, Y_0, Z_0 будутъ три слагающія равнодѣйствующей по осямъ координатъ, а x_0, y_0, z_0—координаты ея точки приложенія, то, на основаніи (5), мы должны имѣть:

$$X_0 = \Sigma Y, \quad Y_0 = \Sigma Y, \quad Z_0 = \Sigma Z \tag{7}$$

$$\begin{aligned} Y_0 z_0 - Z_0 y_0 &= \Sigma(Yz - Zy), \\ Z_0 x_0 - X_0 z_0 &= \Sigma(Zx - Xz), \\ X_0 y_0 - Y_0 x_0 &= \Sigma(Xy - Yx), \end{aligned} \tag{8}$$

гдѣ вообще X, Y, Z обозначаютъ слагающія данныхъ силъ, приложенныхъ къ разнымъ точкамъ (x, y, z) твердаго тѣла и уравновѣшивающихся одною силою (X_0, Y_0, Z_0), приложенною въ точкѣ (x_0, y_0, z_0). Изъ вышеприведенныхъ уравненій (7) и (8) легко видѣть, что не всегда можно найти три слагающія X_0, Y_0, Z_0 одной силы, которая уравновѣшивала-бы всякую данную систему силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло. Дѣйствительно, помножая урр. (8) соотвѣтственно на X_0, Y_0, Z_0 и складывая, мы находимъ:

$$X_0 \sum(Yz - Zy) + Y_0 \sum(Zx - Xz) + Z_0 \sum(Xy - Yx) = 0, \tag{9}$$

откуда видимъ, что три искомыя величины X_0, Y_0, Z_0 должны, кромѣ трехъ урр. (7), еще удовлетворять уравненію (9), что не всегда возможно. Уравненія (7) требуютъ, чтобы искомая равнодѣйствующая равнялась геометрической суммѣ слагающихъ, а уравненіе (9)— чтобы направленія равнодѣйствующей (если таковая найдется) и момента слагающихъ около начала координатъ были перпендикулярны другъ къ другу. Это послѣднее условіе имѣетъ очевидно мѣсто, гдѣ-бы ни было выбрано начало координатъ, ибо урр. (8), изъ которыхъ слѣдуетъ ур. (9), существуютъ для всякаго начала координатъ. Подставляя величины X_0, Y_0, Z_0 изъ (7) въ (9), мы находимъ слѣдующее условіе, которому должны удовлетворять данныя силы, чтобы имѣть одну равнодѣйствующую:

$$\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y . \Sigma(Zx - Xz) + \Sigma Z . \Sigma(Xy - Yx) = 0. \tag{9}$$

Что касается до урр. (8), то каждое изъ нихъ, на основаніи (9), представляется слѣдствіемъ двухъ остальныхъ, вслѣдствіе чего координаты x_0, y_0, z_0 точки приложенія равнодѣйствующей опредѣляются только двумя независимыми другъ отъ друга уравненіями, которымъ удовлетворяютъ всѣ точки нѣкоторой прямой линіи. Такой результатъ очевиденъ самъ по себѣ, ибо точка приложенія силы, дѣйствующей на твердое тѣло, можетъ быть перенесена куда угодно вдоль по прямой, совпадающей съ направленіемъ силы.

Но всегда можно найти двѣ силы (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2), приложенныя къ двумъ точкамъ (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), которыя замѣняли-бы данную систему силъ. Такія силы и ихъ точки приложенія опредѣлятся очевидно уравненіями:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 = \Sigma X, \quad Y_1 + Y_2 = \Sigma Y, \quad Z_1 + Z_2 = \Sigma Z, \\ Y_1 z_1 - Z_1 y_1 + Y_2 z_2 - Z_2 y_2 = \Sigma(Yz - Zy), \\ Z_1 x_1 - X_1 z_1 + Z_2 x_2 - X_2 z_2 = \Sigma(Zx - Xz), \\ X_1 y_1 - Y_1 x_1 + X_2 y_2 - Y_2 x_2 = \Sigma(Xy - Yx), \end{aligned} \qquad (10)$$

при чемъ вообще можно подобрать нѣсколько силъ по двѣ, изъ которыхъ каждыя двѣ вмѣстѣ были-бы равнодѣйствующими даннымъ, ибо число уравненій (10), опредѣляющихъ двѣ силы и ихъ точки приложенія, меньше числа искомыхъ неизвѣстныхъ.

Точно также всегда можно найти нѣкоторую пару силъ и силу, замѣняющія данныя силы. Называя данныя величины

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z$$

$$\Sigma(Yz - Zy), \quad \Sigma(Zx - Xz), \quad \Sigma(Xy - Yx)$$

соотвѣтственно черезъ (11)

$$A, B, C, L, M, N,$$

мы будемъ имѣть слѣдующія уравненія для опредѣленія слагающихъ X_0, Y_0, Z_0 силы, координатъ ея точки приложенія (x_0, y_0, z_0) и слагающихъ моментовъ λ, μ, ν искомой пары:

$$X_0 = A, \quad Y_0 = B, \quad Z_0 = C, \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} Y_0 z_0 - Z_0 y_0 + \lambda = L, \\ Z_0 x_0 - X_0 z_0 + \mu = M, \\ X_0 y_0 - Y_0 x_0 + \nu = N. \end{aligned} \qquad (13)$$

Такъ какъ для опредѣленія точки приложенія силы достаточно только двухъ уравненій, опредѣляющихъ нѣкоторую прямую, то изъ урр. (13) остается только одно для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ λ, μ, ν. Слѣдовательно, можно подобрать безчисленное множество паръ, изъ которыхъ каждая вмѣстѣ съ силою (X_0, Y_0, Z_0) замѣняла-бы данныя силы, лишь-бы слагающіе моменты этихъ паръ удовлетворяли уравненію

$$A\lambda + B\mu + C\nu = AL + BM + CN, \qquad (14)$$

которое мы получаемъ помножая урр. (13) соотвѣтственно на A, B, C, и складывая. Но между этими парами можно найти одну, которая будетъ перпендикулярна къ силѣ (A, B, C) и направленіе момента которой будетъ слѣдовательно параллельно этой силѣ. Дѣйствительно, помня, что если двѣ линіи параллельны, то ихъ проложенія на всякія другія линіи будутъ въ постоянномъ отношеніи между собою, мы можемъ условіе параллельности линій (A, B, C) и (λ, μ, ν) выразить такимъ образомъ:

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{\mu}{B} = \frac{\nu}{C}, \tag{15}$$

и получимъ изъ трехъ уравненій (14) и (15) также, какъ въ § 23, (39):

$$\begin{aligned} \lambda &= A\frac{AL+BM+CN}{R^2}, \\ \mu &= B\frac{AL+BM+CN}{R^2}, \\ \nu &= C\frac{AL+BM+CN}{R^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

гдѣ

$$R^2 = A^2 + B^2 + C^2. \tag{17}$$

Полагая въ каждомъ изъ трехъ выраженій (16) соотвѣтственно

$$\begin{aligned} A^2L &= (R^2 - B^2 - C^2)\,L, \\ B^2M &= (R^2 - A^2 - C^2)\,M, \\ C^2N &= (R^2 - B^2 - A^2)\,N, \end{aligned}$$

мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \lambda &= L - B\frac{LB-MA}{R^2} - C\frac{NA-LC}{R^2}, \\ \mu &= M - C\frac{MC-NB}{R^2} - A\frac{LB-MA}{R^2}, \\ \nu &= N - A\frac{NA-LC}{R^2} - B\frac{MC-NB}{R^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

вслѣдствіе чего урр. (13) обращаются въ

$$\begin{aligned} B(z_0-c) - C(y_0-b) &= 0, \\ C(x_0-a) - A(z_0-c) &= 0, \\ A(y_0-b) - B(x_0-a) &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

гдѣ

$$a = \frac{MC - NB}{R^2}, \qquad b = \frac{NA - LC}{R^2}, \qquad c = \frac{LB - MA}{R^2}, \tag{19}$$

откуда видимъ, что одною изъ возможныхъ точекъ приложенія силы (A, B, C) будетъ точка, координаты которой суть:

$$x_0 = a, \qquad y_0 = b, \qquad z_0 = c, \tag{20}$$

какъ мы уже видѣли въ § 23, (42).

Если данныя силы параллельны между собою, то обозначая черезъ l, m, n косинусы угловъ, которые какая нибудь F изъ этихъ силъ дѣлаетъ съ осями координатъ и помня, что эти углы, вслѣдствіе условія параллельности, для всѣхъ силъ должны быть одинаковы, мы будемъ имѣть:

$$\begin{gathered} \Sigma X = l\Sigma F, \qquad \Sigma y = m\Sigma F, \qquad \Sigma Z = n\Sigma F \\ \Sigma(Yz - Zy) = m\Sigma Fz - n\Sigma Fy, \\ \Sigma(Zx - Xz) = n\Sigma Fx - l\Sigma Fx, \\ \Sigma(Xy - Yx) = l\Sigma Fy - m\Sigma Fx, \end{gathered} \tag{21}$$

вслѣдствіе чего условіе $(9)'$ удовлетворится, и равнодѣйствующая найдется изъ уравненій

$$X_0 = l\Sigma F, \qquad Y_0 = m\Sigma F, \qquad Z_0 = n\Sigma F, \tag{22}$$

откуда, обозначая самую равнодѣйствующую черезъ F_0, имѣемъ:

$$F_0 = \Sigma F; \tag{23}$$

косинусы угловъ равнодѣйствующей съ осями будутъ очевидно l, m, n. Въ такомъ случаѣ уравн. (8), опредѣляющія точку приложенія равнодѣйствующей, превратятся въ

$$\begin{aligned} mF_0z_0 - nF_0y_0 &= m\Sigma Fz - n\Sigma Fy, \\ nF_0x_0 - lF_0z_0 &= n\Sigma Fx - l\Sigma Fz, \\ lF_0y_0 - mF_0x_0 &= l\Sigma Fy - m\Sigma Fx. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти уравненія удовлетворятся, какія-бы ни были величины l, m, n, если всегда

$$x_0 = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}, \qquad y_0 = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}, \qquad z_0 = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}; \tag{25}$$

то есть, равнодѣйствующая проходитъ всегда черезъ одну и туже точку — центръ параллельныхъ силъ, который опредѣляется, какъ центръ инерціи массъ, равныхъ по величинѣ даннымъ силамъ и размѣщенныхъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ приложенія, что явствуетъ изъ сравненія выраженій (25) и (§ 22), (27).

Если параллельныя силы пропорціональны массамъ матеріальныхъ точекъ, къ которымъ онѣ приложены, то мы будемъ имѣть для каждой массы m и для каждой силы F:

$$F = m \cdot g \qquad \text{и} \qquad \Sigma F = g \Sigma m , \tag{23$'$}$$

гдѣ g есть коеффиціентъ пропорціональности, одинакій для всѣхъ силъ и массъ, и представляющій очевидно ускореніе (всегда одно и тоже), сообщаемое силою F массѣ m.

Такой случай мы имѣемъ при дѣйствіи тяжести вблизи отъ земной поверхности. Тогда выраженія (25) превращаются очевидно въ

$$x_0 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \qquad y_0 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \qquad Z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}. \tag{25$'$}$$

Центръ параллельныхъ силъ при этомъ носитъ названіе центра тяжести, и его положеніе, не завися отъ величины силъ, совпадаетъ съ центромъ инерціи данныхъ массъ.

§ 41. Равновѣсіе твердаго тѣла, съ одною несвободною точкою.

Твердое тѣло не будетъ свободно, когда для него сдѣлаются невозможными одно или нѣсколько изъ поступательныхъ или вращательныхъ перемѣщеній. Ограниченіе поступательныхъ перемѣщеній можетъ имѣть мѣсто, когда одна изъ точекъ тѣла или неподвижна, или должна оставаться всегда на нѣкоторой данной поверхности, или должна оставаться на нѣкоторой линіи, или можетъ сойти съ одной или нѣсколькихъ поверхностей въ опредѣленныя отъ нихъ стороны, и т. п. Ограниченіе вращательныхъ перемѣщеній можетъ имѣть мѣсто, когда двѣ точки тѣла неподвижны, или извѣстнымъ способомъ связаны съ одною или нѣсколькими данными поверхностями, и т. д.

Для всѣхъ вышеупомянутыхъ случаевъ вообще, въ выраженіи

$$\delta a \Sigma X + \delta b \Sigma Y + \delta c \Sigma Z$$
$$+ \delta\alpha \Sigma (Yz - Zy) + \delta\beta \Sigma (Zx - Xz) + \delta\gamma \Sigma (Xy - Yx) \leqq 0 , \tag{26}$$

представляющемъ условіе равновѣсія неизмѣняемой системы, величины δa, δb, δc, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, не будутъ уже совершенно произвольны, ибо для несвободнаго твердаго тѣла не представляются возможными всякія поступательныя и вращательныя движенія. Разберемъ нѣсколько случаевъ равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла.

1) Пусть одна изъ точекъ твердаго тѣла не можетъ оставить нѣкоторую данную поверхность. Слѣдовательно, для упомянутой точки, также какъ и для всей системы, возможны изъ положенія равновѣсія всякія поступательныя перемѣщенія вдоль по элементу поверхности, на которомъ она находится, и невозможны перемѣщенія, къ этому элементу перпендикулярныя. Кромѣ того предполагается очевидно, что вращенія системы около точки соприкосновенія ея съ данною поверхностію не стѣснены никакимъ условіемъ. Выберемъ начало координатъ въ какой либо точкѣ упомянутаго элемента поверхности, ось z—овъ — перпендикулярно къ его плоскости, а оси x—овъ и y—овъ — какъ-либо въ самой плоскости элемента. Тогда пять перемѣщеній δa, δb, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, въ выраженіи (26), могутъ быть разсматриваемы, какъ совершенно произвольныя; перемѣщеніе-же δc должно быть всегда равно нулю. Условіе равновѣсія (26) въ такомъ случаѣ удовлетворится, когда только пять коеффиціентовъ при пяти произвольныхъ величинахъ обратятся въ нули; множитель-же при δc можетъ быть очевидно какой угодно. Итакъ, уравненія равновѣсія для даннаго случая будутъ:

$$\Sigma X = 0\,, \quad \Sigma Y = 0\,,$$

$$\Sigma(Yz - Zy) = 0\,, \quad \Sigma(Zx - Xz) = 0\,, \quad \Sigma(Xy - Yx) = 0\,, \qquad (27)$$

обозначающія, что геометрическая сумма взаимноуравновѣшивающихся силъ должна быть по направленію перпендикулярна къ элементу поверхности, поддерживающему тѣло, а по величинѣ можетъ быть произвольна, и что геометрическая сумма моментовъ силъ около начала, совпадающаго съ этимъ элементомъ, равна нулю.

Къ тѣмъ-же выводамъ мы приходимъ слѣдующими разсужденіями. Всякая система силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ, можетъ быть замѣнена взаимно перпендикулярными парою и силою, т. е. тремя силами. Очевидно, что упомянутая система силъ будетъ въ равновѣсіи, если пара равна будетъ нулю, а сила пройдетъ черезъ точку, лежащую на элементѣ поверхности, и будетъ направлена перпендикулярно къ этому послѣднему.

Если вышеупомянутыя условія равновѣсія не удовлетворяются, то можно найти вообще одну силу, которая вмѣстѣ съ данными обусловливала-бы равновѣсіе. Дѣйствительно, пусть mn (рис. 66) будетъ плоскость, параллельная элементу поверхности, поддерживающему одну изъ точекъ твердаго тѣла; пусть C будетъ слѣдъ на mn нормали къ этому элементу; пусть f и f' будутъ двѣ силы, замѣняющія данную систему силъ (см. § 23 и § 40), при чемъ f перпендикулярна къ плоскости mn и пересѣкаетъ ее въ точкѣ B, а f' совпадаетъ съ упомянутою плоскостію. Если CB и f' пересѣкутся въ какой-либо точкѣ A, то къ этой послѣдней мы приложимъ двѣ силы p и q, изъ которыхъ первая равна и противоположна силѣ f', а послѣдняя перпендикулярна къ плоскости mn, и, слагаясь съ f, даетъ нѣкоторую силу, приложенную въ точкѣ C. Обѣ силы p и q, или, что все равно, ихъ равнодѣйствующая R', уравновѣшиваютъ систему силъ, представляемую силами f и f'. Сила R равная и противоположная силѣ R' будетъ очевидно равнодѣйствующая данныхъ силъ при данныхъ условіяхъ. Такая равнодѣйствующая можетъ быть однако найдена только очевидно въ томъ случаѣ, когда точка A не лежитъ въ безконечности и не совпадаетъ съ C.

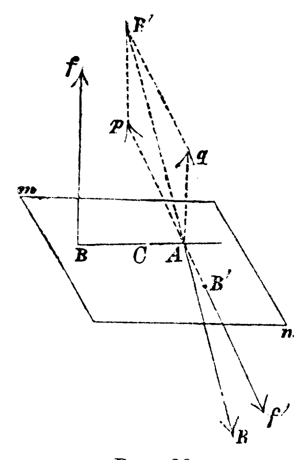
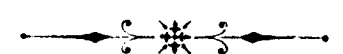


Рис. 66.



Величина, направленіе и точка приложенія равнодѣйствующей, при разсматриваемыхъ условіяхъ, могутъ быть также опредѣлены непосредственно изъ условій равновѣсія (27). Обозначая черезъ X_0, Y_0, Z_0 слагающія равнодѣйствующей, а черезъ x_0, y_0, z_0 — координаты ея точки приложенія, мы будемъ имѣть, по (27), введя обозначенія (11):

$$X_0 = A, \qquad Y_0 = B,$$

$$Y_0 z_0 - Z_0 y_0 = L, \qquad Z_0 x_0 - X_0 z_0 = M, \qquad X_0 y_0 - Y_0 x_0 = N. \qquad (28)$$

Подставляя величины X_0, Y_0 изъ первыхъ двухъ уравненій въ три остальныя, множа эти послѣднія соотвѣтственно на A, B, Z_0, и складывая, мы получаемъ:

$$AL + BM + Z_0 N = 0\,, \tag{29}$$

откуда

$$Z_0 = -\frac{AL + BM}{N}\,. \tag{30}$$

Подставляя найденную величину Z_0 въ три послѣднія уравненія (28), мы будемъ имѣть слѣдующія уравненія для опредѣленія x_0, y_0, z_0:

$$Bz_0 + \frac{AL + BM}{N} y_0 = L\,,$$

$$\frac{AL + BM}{N} x_0 + Az_0 = -M\,, \tag{31}$$

$$Ay_0 - Bx_0 = N\,,$$

изъ которыхъ каждое представляется, какъ легко замѣтить, слѣдствіемъ двухъ остальныхъ; слѣдовательно урр. (31) опредѣляютъ цѣлый безконечный рядъ точекъ приложенія равнодѣйствующей, лежащихъ вдоль по линіи дѣйствія этой послѣдней. Кромѣ того изъ (31) мы видимъ, что равнодѣйствующая пересѣкаетъ плоскость (xy), т. е. плоскость, совпадающую съ элементомъ задерживающей поверхности, въ точкѣ

$$x_0' = -\frac{MN}{AL + BM}\,, \qquad y_0' = \frac{LN}{AL + BM}\,, \tag{32}$$

которая опредѣлится, полагая въ (31)

$$z_0 = 0\,.$$

Точно также найдемъ, что равнодѣйствующая пересѣкаетъ плоскость (zx) (при $y_0 = 0$) въ точкѣ

$$z_0'' = \frac{L}{B}\,, \qquad x_0'' = -\frac{N}{B}\,. \tag{32}$$

и плоскость (yz) (при $x_0 = 0$) въ точкѣ

$$z_0''' = -\frac{M}{A}\,, \qquad y_0''' = \frac{N}{A}\,. \tag{32}$$

Разсмотримъ частные случаи предыдущихъ рѣшеній, когда

или a) $N = 0$,

или b) $A = B = 0$.

Для случая a) выраженіе (30) даетъ

$$Z = \frac{AL + BM}{0}, \tag{33}$$

и Z_0 имѣетъ только тогда возможное значеніе, когда

$$AL + BM = 0; \tag{34}$$

при этомъ послѣднемъ условіи, мы найдемъ легко, что

$$x_0'' = y_0''' = 0, \quad x_0' = \frac{M}{Z_0}, \quad y_0' = -\frac{L}{Z_0}, \quad z_0'' = z'''_0 = \frac{L}{B} = -\frac{M}{A}, \tag{35}$$

при чемъ Z_0 можетъ быть выбрано какимъ угодно.

На (рис. 66) легко видѣть, что, при условіи a), f' проходитъ черезъ точку C, и тогда нѣтъ одной равнодѣйствующей; прибавочное условіе (34) требуетъ, чтобы сила f тоже была приложена къ точкѣ C.

Случай b) имѣетъ тогда мѣсто, когда система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, сводится къ силѣ f и парѣ, лежащей въ плоскости mn (рис. 66), и когда замѣна этой системы силами f' и f невозможна. Тогда очевидно возможны не менѣе двухъ равнодѣйствующихъ, лежащихъ въ двухъ различныхъ плоскостяхъ, и приложенныхъ къ разнымъ точкамъ, при чемъ очевидно, одна равнодѣйствующая вообще не будетъ имѣть мѣста. Но если случаи a) и b) существуютъ совмѣстно, то всегда находится одна равнодѣйствующая Z_0, величина которой и точки приложенія опредѣляются уравненіями

$$-Zy_0 = L, \quad Z_0 x_0 = M. \tag{36}$$

Наконецъ случай $L = M = 0$ соотвѣтствуетъ тому, когда сила f приложена къ точкѣ C, и когда равнодѣйствующая системы равна и противоположна силѣ f'.

---

2) Предположимъ, что свобода перемѣщеній одной какой нибудь точки неизмѣняемой системы стѣснена тѣмъ условіемъ, что эта точка не можетъ покинуть какую-либо данную поверхность (т. е. одинъ изъ плоскихъ элементовъ) только въ одну какую-либо сторону по перпендикуляру отъ этой послѣдней. Въ такомъ случаѣ, какъ и въ предыдущемъ, очевидно, что система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, должна замѣняться только одною силою, проходящею черезъ элементъ поверхности, перпендикулярно къ этому послѣднему и

въ направленіи невозможнаго перемѣщенія. Выбирая оси координатъ также, какъ въ предыдущемъ случаѣ, и кромѣ того ось z—овъ, перпендикулярную къ элементу поверхности—въ томъ направленіи, по которому точка не можетъ отойти отъ поверхности, мы легко замѣтимъ, что пять изъ извѣстныхъ шести перемѣщеній могутъ быть въ условіи (26) выбраны произвольно, а шестое δc—только всегда отрицательнымъ. Вслѣдствіе этого условія равновѣсія выразятся для даннаго случая слѣдующими уравненіями:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z \geqq 0,$$
$$\Sigma(Yz - Zy) = 0, \quad \Sigma(Zx - Xz) = 0, \quad \Sigma(Xy - Yx) = 0, \qquad (37)$$

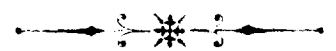
значеніе которыхъ только-что было объяснено.

Если условія (37) не удовлетворяются, то система приложенныхъ силъ можетъ быть замѣнена нѣкоторою парою и перпендикулярною къ ней силою, при чемъ вообще возможно найти еще одну силу или одну пару, изъ которыхъ та или другая, вмѣстѣ съ данными силами, удерживала-бы систему въ равновѣсіи. Тутъ, такъ-же какъ и въ предыдущемъ, возможны два случая: a)—когда система данныхъ силъ замѣняется такими парою и силою, изъ которыхъ первая лежитъ въ плоскости mn (рис. 66), параллельной плоскости элемента поддерживающей поверхности, а сила перпендикулярна къ этой поверхности; b) когда замѣняющія пара и сила расположены иначе, нежели въ предыдущемъ случаѣ.

Въ случаѣ a) очевидно нельзя найти одну уравновѣшивающую, если только пара не равна нулю. Но найдутся всегда двѣ уравновѣшивающія силы, въ двухъ разныхъ плоскостяхъ, приложенныя къ разнымъ точкамъ; одна изъ упомянутыхъ силъ будетъ лежать въ плоскости mn. Дѣйствительно, если мы вообразимъ себѣ пару и силу, равныя и противоположныя даннымъ, при чемъ послѣдняя приложена въ туже точку, какъ данная сила, то очевидно, система будетъ въ равновѣсіи. Но одну изъ силъ пары мы можемъ приложить въ одну точку съ одиночною силою, и замѣнить обѣ эти приложенныя къ одной точкѣ силы одною, которая вмѣстѣ съ оставшеюся другою силою пары и будетъ уравновѣшивать данную систему силъ.

Въ случаѣ b) мы можемъ данную пару и силу замѣнить, какъ на рис. (66), двумя взаимно перпендикулярными силами f и f', приложенными въ разныхъ точкахъ, и расположенными такъ, что одна изъ этихъ силъ лежитъ въ плоскости, параллельной поддерживающему элементу.

При этомъ положимъ, что невозможныя перемѣщенія направлены внизъ отъ плоскости mn, перпендикулярно къ этой послѣдней. Уравновѣшивающую силу мы найдемъ опять также, какъ въ случаѣ 1); т. е. проведемъ прямую BC, соединяющую точку приложенія силы f со слѣдомъ C, на плоскости mn, нормали къ поддерживающей поверхности, а къ точкѣ пересѣченія линіи CB и силы f', т. е. къ нѣкоторой точкѣ A, приложимъ силу p, равную и противоположную силѣ f', и силу q, которая, слагаясь съ параллельною ей силою f, дала-бы нѣкоторую равнодѣйствующую, приложенную къ точкѣ C и направленную внизъ отъ плоскости mn. Геометрическая сумма R' силъ p и q, приложенная къ точкѣ A, представитъ очевидно искомую уравновѣшивающую, а равная и противоположная ей сила R—равнодѣйствующую силъ f и f' при данныхъ условіяхъ. Для выполненія упомянутаго построенія необходимо во первыхъ, чтобы линіи CB и f' не были параллельны другъ другу, а во вторыхъ, чтобы ихъ точка пересѣченія A лежала между точками C и B, если сила f направлена вверхъ отъ плоскости mn; если сила f направлена внизъ отъ плоскости mn, т. е. параллельно невозможнымъ поступательнымъ перемѣщеніямъ, то точка должна приходиться внѣ отрѣзка прямой CB. Эти заключенія дѣлаются сами по себѣ очевидны, если мы припомнимъ правило сложенія параллельныхъ силъ и обратимъ вниманіе на то, что результирующая параллельныхъ силъ p и q (т. е. сила равная ихъ геометрической суммѣ и имѣющая съ ними одинакій моментъ около всякаго начала), будучи приложена къ A, должна направляться внизъ отъ плоскости mn.



Къ тѣмъ-же самымъ выводамъ мы прійдемъ, разсматривая общія уравненія (37), соотвѣтствующія данному случаю. Обозначая, какъ прежде, черезъ X_0, Y_0, Z_0, слагающія искомой равнодѣйствующей, черезъ x_0, y_0, z_0 — координаты ея точки приложенія, и вводя обозначенія A, B, C, L, M, N, мы получимъ, на основаніи (37), слѣдующія условія для нахожденія равнодѣйствующей:

$$X_0 = A\,, \quad Y_0 = B\,, \quad Z_0 \leqq C\,,$$
$$Y_0 z_0 - Z_0 y_0 = L, \quad Z_0 x_0 - X_0 z_0 = M\,, \quad X_0 y_0 - Y_0 x_0 = N\,, \tag{38}$$

откуда получаемъ, какъ прежде:

$$AL + BM + Z_0 N = 0 \tag{39}$$

и

$$Z_0 = -\frac{AL + BM}{N}, \tag{40}$$

но съ тѣмъ, чтобы было $Z_0 < C$.

Для опредѣленія координатъ x_0, y_0, z_0 получимъ тѣже уравненія (31), которыя дадутъ намъ, полагая въ нихъ по очередно $z_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, координаты точекъ, въ которыхъ равнодѣйствующая пересѣкаетъ плоскости координатъ:

для плоск. (xy): $x_0{}' = -\frac{MN}{AL + BM}$, $y_0{}' = \frac{LN}{AL + BM}$, (41)

для плоск. (zx): $z_0{}'' = \frac{L}{B}$, $x_0{}'' = -\frac{N}{B}$, (41)

для плоск. (yz): $y_0{}''' = \frac{N}{A}$, $z_0{}''' = -\frac{M}{A}$. (41)

Данныя величины A, B, C, L, M, N мы выразимъ съ помощію введенныхъ выше силъ f и f'. Оси x—овъ и y—овъ, расположенныя въ плоскости параллельной mn, т. е. въ плоскости поддерживающаго элемента, выберемъ такъ, чтобы ось x—овъ была параллельна линіи CB, уголъ между CB и f' обозначимъ черезъ α, и разстояніе C отъ поверхности, считаемое вдоль по оси z—овъ, назовемъ черезъ—c (ибо оно идетъ на рисункѣ вверхъ отъ плоскости XY, т. е. по отрицательной оси z—овъ); разстояніе CB обозначимъ черезъ a; тогда координаты точки B будутъ: $x = a$, $y = 0$, $z = -c$; наконецъ координаты точки B' обозначимъ черезъ a', b', $-c$. Затѣмъ легко вычислимъ, что

$$\begin{gathered} A = f'\cos\alpha\,, \quad B = f'\sin\alpha\,, \quad C = -f \\ L = -cf'\sin\alpha\,, \quad M = -af + cf'\cos\alpha\,, \\ N = b'f'\cos\alpha - a'f'\sin\alpha\,, \end{gathered} \tag{42}$$

$$Z_0 = \frac{af\sin\alpha}{b'\cos\alpha - a'\sin\alpha} \quad \text{и должн. быть} < -f, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} x_0{}' &= \frac{(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha)(cf'\cos\alpha - af)}{af\sin\alpha}, \\ y_0{}' &= \frac{cf'}{af}(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha), \quad \text{и т. д..} \end{aligned} \tag{44}$$

Изъ выше приведенныхъ выраженій прежде всего видно, что искомая равнодѣйствующая не отыскивается, когда $\alpha = 0$, т. е. когда сила f' направлена параллельно линіи AC; въ такомъ случаѣ $Z_0 = 0$, и условіе (43) выполнится, только когда сила f направлена въ сто-

рону обратную данной. Итакъ, при данномъ направленіи силы f, равнодѣйствующая тогда возможна, когда линія f' и ось x-овъ пересѣкаются въ какой либо не безконечно удаленной точкѣ A. Обозначая длину CA, откладываемую въ положительномъ направленіи оси x-овъ, черезъ l, и замѣчая, что въ такомъ случаѣ

$$-l\sin\alpha = b'\cos\alpha - a'\sin\alpha\,, \tag{45}$$

мы получаемъ изъ (42), (43) и (44):

$$N = -f'l\sin\alpha\,, \qquad Z_0 = -\frac{af}{l} < -f\,, \tag{46}$$

$$x_0' = -\frac{l\,(cf'\cos\alpha - af)}{af}\,, \qquad y_0' = -\frac{cf'}{af}\,l\sin\alpha\,, \tag{47}$$

откуда видимъ, что условіе $Z_0 < -f$ можетъ быть удовлетворено или тогда, когда, при направленіи силы f внизъ, величины a и l имѣютъ одинъ знакъ и $l < a$, или когда, при направленіи силы f вверхъ, величины a и l имѣютъ разныя знаки; въ первомъ случаѣ точка A лежитъ между C и B; во второмъ случаѣ—внѣ промежутка CB и такъ, что точка C приходится между B и A.

Рѣшенія (40) и (41) могутъ сдѣлаться невозможными, когда

$$\text{или } a)\, N = 0\,, \qquad \text{или } b)\, AL + BM = 0\,. \tag{48}$$

Случай a) имѣетъ мѣсто, когда

$$N = f'\,(b'\cos\alpha - a'\sin\alpha) = 0\,, \tag{49}$$

т. е. когда

$$\text{или} \quad f' = 0\,, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b'}{a'}\,. \tag{50}$$

Первому предположенію соотвѣтствуетъ однако опредѣленное рѣшеніе:

$$X_0 = 0\,, \qquad Y_0 = 0\,, \qquad Z_0 = -\frac{af}{l} < -f\,, \quad x_0' = l, \quad y_0' = 0\,, \tag{51}$$

гдѣ l есть произвольная величина, связанная только условіемъ:

$$\frac{a}{l} > 1\,. \tag{52}$$

Во второмъ случаѣ очевидно, f' приложена къ точкѣ C, и рѣшеніе тогда возможно, когда $af = 0$, т. е. когда сила f приложена тоже къ точкѣ C, или равна нулю.

Въ случаѣ b) имѣемъ:

$$af\sin\alpha = 0\,, \tag{53}$$

и рѣшеніе невозможно, когда или $a = 0$, или $\alpha = 0$; но для $f = 0$ имѣемъ:

$$X_0 = f' \cos\alpha\,, \qquad Y_0 = f' \sin\alpha\,, \qquad \frac{y_0'}{x_0'} = tg\alpha\,, \qquad Z_0 = 0\,; \qquad (54)$$

т. е. равнодѣйствующая есть сама сила f'.



Какъ примѣръ разобранныхъ выше случаевъ равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла, разсмотримъ равновѣсіе тяжелаго тѣла, опирающагося одною точкою на нѣкоторую плоскость, горизонтальную или наклонную.

Сила тяжести, дѣйствующая на каждый элементъ массы разсматриваемаго твердаго тѣла, можетъ быть замѣнена, по § 40, одною силою F (23)', приложенною къ его центру тяжести (25)'. Если плоскость, на которую опирается сверху одною точкою тяжелое твердое тѣло, будетъ горизонтальна, т. е. перпендикулярна къ направленію тяжести, то условіе равновѣсія должно состоять очевидно въ томъ, чтобы центръ тяжести и точка опоры находились на одномъ перпендикулярѣ къ плоскости. Если положеніе центра тяжести не удовлетворяетъ этому условію, то можно найти одну силу, которая удержала-бы тѣло въ равновѣсіи при его данномъ положеніи; сила равная и прямо противоположная этой послѣдней будетъ равнодѣйствующею силы F. Найдемъ ея величину и ея точку приложенія.

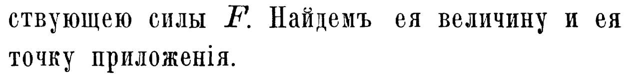


Рис. 67.

Плоскость опоры выберемъ, какъ прежде, за плоскость $(x\,y)$, ось z-овъ—внизъ, по направленію тяжести; плоскость $(x\,z)$ проведемъ черезъ центръ тяжести O, и начало координатъ выберемъ въ точкѣ опоры A (рис. 67); наконецъ разстояніе AB обозначимъ черезъ a и разстояніе BO—черезъ c. Прилагая къ этому случаю форм. (42), находимъ:

$$A = 0\,, \quad B = 0\,, \quad C = F\,, \quad L = 0\,, \quad M = aF\,, \quad N = 0\,, \qquad (55)$$

вслѣдствіе чего условіе (39) удовлетворяется, а уравненія (38) даютъ:

$$Z_0 = F\,, \quad X_0 = 0\,, \quad Y_0 = 0\,, \quad Z_0 x_0 = aF\,, \qquad (56)$$

откуда:

$$x_0 = a\frac{F}{Z_0}, \qquad \text{гдѣ} \quad \frac{F}{Z_0} \overline{>} 1. \qquad (57)$$

Слѣдовательно, сила F можетъ быть замѣнена какою угодно меньшею силою въ томъ-же направленіи, приложенною къ какой-либо точкѣ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ O и A, и при томъ такъ, чтобы разстояніе линіи дѣйствія новой силы было во столько разъ дальше отъ точки A, во сколько эта сила Z_0 меньше силы F. Разобранному случаю очевидно соотвѣтствуетъ рѣшеніе (51).

Если къ твердому тѣлу, кромѣ силы F, еще приложена нѣкоторая пара P, то одну равнодѣйствующую найти можно только въ исключительныхъ случаяхъ. Дѣйствительно, если мы обозначимъ углы, которые моментъ пары дѣлаетъ съ выбранными по прежнему осями координатъ, черезъ α, β, γ, а величину самаго момента—черезъ P, то очевидно будемъ имѣть:

$$\begin{gathered} A = 0, \quad B = 0, \quad C = F, \\ L = P\cos\alpha, \quad M = P\cos\beta + aF, \quad N = P\cos\gamma, \end{gathered} \qquad (58)$$

и уравненія (38), (39) дадутъ невозможныя рѣшенія:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = 0 = C.$$

Но если $\cos\gamma = 0$, т. е. если плоскость пары проходитъ черезъ ось z-овъ, то урр. (38) даютъ:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 \underline{<} F. \qquad (59)$$

$$-Z_0 y_0 = P\cos\alpha, \quad Z_0 x_0 = P\cos\beta + aF; \qquad (60)$$

т. е. равнодѣйствующею будетъ любая сила, направленная вертикально и меньшая чѣмъ F, или ей равная; точка приложенія для каждой изъ такихъ силъ опредѣляется изъ (60).

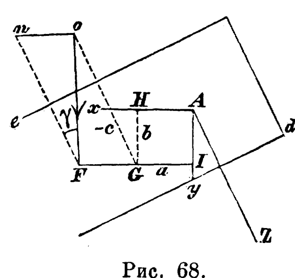


Рис. 68.

Положимъ теперь, что поддерживающая плоскость ed (рис. 68) не перпендикулярна къ направленію силы тяжести OF, приложенной къ центру тяжести O. Черезъ точку F пересѣченія линіи OF и наклонной плоскости ed проведемъ перпендикуляръ nF къ этой послѣдней, и черезъ обѣ линіи OF и nF—плоскость nG. Затѣмъ линію Ax, проходящую черезъ точку опоры A и параллельную плоскости

nG, выберемъ за ось x-овъ, а перпендикуляръ Az къ плоскости ed— за ось z-овъ. Линіи GI, GH, GO, абсолютныя длины которыхъ мы обозначимъ черезъ a, b, c, будутъ очевидно координатами центра тяжести O. Уголъ наклона плоскости ed къ горизонту, т. е. уголъ между OF и nF назовемъ черезъ γ. Вычисляя затѣмъ величины $A, B \ldots L \ldots$ и т. д., будемъ имѣть:

$$\begin{gathered} A = F\sin\gamma\,, \quad B = 0\,, \quad C = F\cos\gamma\,, \\ L = -bF\cos\gamma\,, \quad M = F(a\cos\gamma + c\sin\gamma)\,, \quad N = bF\sin\gamma\,, \end{gathered} \tag{61}$$

вслѣдствіе чего урр. (38) и (40) дадутъ:

$$X_0 = F\sin\gamma\,, \quad Y_0 = 0\,, \quad Z_0 = F\cos\gamma\,, \tag{62}$$

а урр. (41):

$$x_0' = a + c\,\mathrm{tg}\,\gamma = a + FG\,, \quad y_0' = b\,. \tag{63}$$

Слѣдовательно, при данномъ положеніи центра тяжести тѣла, возможна только одна равнодѣйствующая, совпадающая съ силою F, и одна уравновѣшивающая сила—прямо противоположная и равная силѣ F.

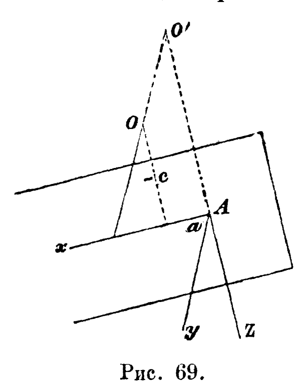


Рис. 69.

Но если $b = 0$ (рис. 69), т. е. если центръ тяжести находится въ одной вертикальной плоскости съ точкою опоры A, то $N = L = 0$, и условіе (39),

$$AL + BM + Z_0 N = 0,$$

удовлетворяется при всякой величинѣ Z_0. Поэтому слагающая Z_0 опредѣляется тогда только неравенствомъ (38), откуда:

$$X_0 = F\sin\gamma\,, \quad Y_0 = 0\,, \quad Z_0 \leqq F\cos\gamma\,. \tag{64}$$

Линія точекъ приложенія искомой силы опредѣляется уравненіями

$$Bz_0 - Z_0 y_0 = L\,, \quad Z_0 x_0 - Az_0 = M\,, \quad Ay_0 - Bx_0 = N\,, \tag{65}$$

которыя, при $B = L = N = 0$, обращаются въ

$$\begin{gathered} Z_0 y_0 = 0\,, \quad Ay_0 = 0, \\ Z_0 x_0 - z_0 F\sin\gamma = F(a\cos\gamma + c\sin\gamma)\,, \end{gathered} \tag{66}$$

откуда видимъ, что такъ какъ всегда $y_0 = 0$, то равнодѣйствующая всегда лежитъ въ плоскости (xz), т. е. въ одной вертикальной пло-

скости съ центромъ тяжести, пересѣкая ось z-овъ (при $x_0 = 0$) въ точкѣ

$$z_0 = -(a \operatorname{cotg} \gamma + c)\,, \tag{67}$$

т. е. въ той-же точкѣ, въ которой эту ось пересѣкаетъ линія OF. Чтобы составить себѣ представленіе о возможныхъ величинахъ равнодѣйствующей, мы отложимъ въ плоскости $O'FZ_0$, перенесенной на рис. (70), длину $O'X_0 = F\sin\gamma$, вдоль по оси x-овъ, а вдоль по оси z-овъ будемъ откладывать длины меньшія $F\cos\gamma$, начиная отъ $O'Z_0 = F\cos\gamma$, до O', и далѣе въ другую сторону до $-\infty$; тогда всякая линія, проведенная отъ точки O' въ углѣ $HO'F$ до пересѣченія съ прямою $H'F$, параллельною $O'Z_0$, представитъ очевидно по величинѣ и направленію искомую равнодѣйствующую. Каждая изъ прямо противоположныхъ и равныхъ силъ уравновѣситъ на данной наклонной плоскости силу F. Если и $a = 0$, то равнодѣйствующая очевидно всегда проходитъ черезъ центръ тяжести O, Наименьшая по абсолютной величинѣ изъ всѣхъ возможныхъ равнодѣйствующихъ очевидно представится перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ O' на линію $H'F$ и будетъ равна $F\sin\gamma$. Отрицательныя значенія $\sin\gamma$ соотвѣтствуютъ очевидно тому случаю, когда тѣло находится подъ наклонною плоскостію.

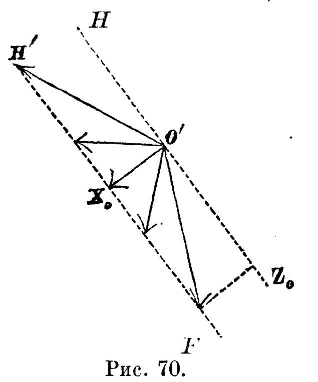


Рис. 70.

Если на расматриваемое тяжелое тѣло, помѣщенное на наклонной плоскости, дѣйствуетъ еще нѣкоторая пара, направленіе момента P которой опредѣляется его углами f, g, h съ осями координатъ, то мы будемъ имѣть:

$$A = F\sin\gamma\,, \quad B = 0\,, \quad C = F\cos\gamma\,, \tag{67}$$

$$\begin{aligned} L &= -bF\cos\gamma + P\cos f, \\ M &= F(a\cos\gamma + c\sin\gamma) + P\cos g\,, \\ N &= bF\sin\gamma + \cos h\,, \end{aligned} \tag{68}$$

вслѣдствіе чего, по (39) и (40):

$$X_0 = F\sin\gamma\,, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = -\frac{F\sin\gamma(-bF\cos\gamma + P\cos f)}{bF\sin\gamma + P\cos h}\,, \tag{69}$$

при условіи, что найденное такимъ образомъ Z_0 будетъ всегда $\leqq F\cos\gamma$. Уравненія (65), опредѣляющія линію точекъ приложенія равнодѣйствующей, превращаются въ

$$-Z_0 y_0 = L\,, \qquad Z_0 x_0 - A z_0 = M\,, \qquad A y_0 = N\,, \tag{70}$$

откуда видимъ, что равнодѣйствующая лежитъ всегда въ плоскости параллельной (zx), и на разстояніи отъ нея

$$y_0 = -\frac{L}{Z_0} = \frac{N}{A} = \frac{bF\sin\gamma + P\cos h}{F\sin\gamma}\,. \tag{71}$$

Кромѣ того, изъ втораго ур. (70) имѣемъ, что при $x_0 = 0$, то есть въ плоскости (yz), координаты точки приложенія будутъ

$$(71), \quad \text{и } z_0 = -\frac{M}{A} = -\frac{F(a\cos\gamma + c\sin\gamma) + P\cos g}{F\sin\gamma}\,; \tag{72}$$

а, при $z_0 = 0$, т. е. въ плоскости (xy):

$$(71), \quad \text{и } x_0 = \frac{M}{Z_0}$$

$$= -\frac{[F(a\cos\gamma + c\sin\gamma) + P\sin g](bF\sin\gamma + P\cos h)}{F\sin\gamma(-bF\cos\gamma + P\cos f)}\,. \tag{73}$$

3) Пусть свобода перемѣщеній нѣкоторой точки твердаго тѣла стѣснена тѣмъ условіемъ, что разсматриваемая точка можетъ перемѣщаться только вдоль данной кривой линіи, не будучи въ состояніи передвигаться по перпендикулярнымъ направленіямъ къ этой послѣдней. Направленіе элемента кривой, на который опирается тѣло одною своею точкою, выберемъ за ось x-овъ; двѣ другія оси будутъ расположены какъ-либо въ плоскости, перпендикулярной къ элементу кривой. Въ такомъ случаѣ, изъ шести безконечно малыхъ величинъ: δa, δb, δc, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, опредѣляющихъ возможныя перемѣщенія неизмѣняемой системы, только четыре: δa, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, могутъ быть выбираемы произвольно; двѣ-же остальныя δb и δc, по условію связности, очевидно всегда равны нулю. Вслѣдствіе этого общее условіе (26) разбивается на слѣдующія уравненія равновѣсія:

$$\begin{gathered}\Sigma X = 0,\\ \Sigma(Yz - Zy) = 0\,, \qquad \Sigma(Zx - Xz) = 0\,, \qquad \Sigma(Xy - Yx) = 0\,,\end{gathered} \tag{74}$$

при чемъ ΣY и ΣZ могутъ быть какія угодно. Значеніе условій

(74) состоитъ очевидно въ томъ, что силы, приложенныя къ точкамъ твердаго тѣла, должны представлять такую систему, которая можетъ быть замѣнена только одною силою (безъ пары), проходящею черезъ точку опоры и лежащею въ плоскости, перпендикулярной къ поддерживающему элементу кривой.

Если условія (74) не удовлетворяются, то вообще можно найти одну силу, которая, вмѣстѣ съ данными, удовлетворяла-бы условіямъ равновѣсія. При этомъ возможны, какъ и прежде, два случая: *a*) когда система данныхъ силъ можетъ быть замѣнена такими парою и силою, изъ которыхъ первая расположена въ одной изъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ плоскости (yz), а вторая перпендикулярна къ оси x-овъ; *b*) когда одиночная сила не параллельна плоскости (zy).

Въ томъ и другомъ случаѣ мы можемъ данную систему силъ замѣнить двумя, изъ которыхъ одна f' (рис. 71) лежитъ въ одной изъ плоскостей (mn), проходящихъ черезъ ось x-овъ, а другая f—въ одной изъ плоскостей (st); перпендикулярныхъ къ той-же оси. Въ случаѣ *a*) сила f будетъ наклонна къ плоскости mn, въ случаѣ *b*)—перпендикулярна. Точку B пересѣченія силы f съ плоскостію mn соединимъ прямою съ точкою опоры A; къ точкѣ C пересѣченія f' и AB приложимъ силу q равную и противоположную силѣ f', къ той-же точкѣ приложимъ другую силу p, параллельную силѣ f, и при томъ такъ, чтобы равнодѣйствующая обѣихъ силъ f и p проходила черезъ точку A; тогда эта равнодѣйствующая, будучи перпендикулярна къ оси x-овъ, уравновѣсится сопротивленіемъ точки опоры, которая можетъ перемѣщаться только вдоль оси x-овъ. Геометрическая сумма силъ p и q представитъ собою искомую уравновѣшивающую, а сила ей равная и противоположная—равнодѣйствующую. Если сила f' параллельна линіи AB, то мы можемъ силу f разложить какъ-либо на двѣ, f_1 и f_2, изъ которыхъ послѣдняя будетъ направлена по Bt, и, слагаясь съ f', дастъ въ плоскости mn новую силу f_1', уже не параллельную къ AB; съ силами f_1 и f_1' поступимъ также, какъ прежде съ f и F'. Если сила f' проходитъ черезъ точку A, то подобнымъ-же разложеніемъ мы ее замѣнимъ другою, не проходящею черезъ A.

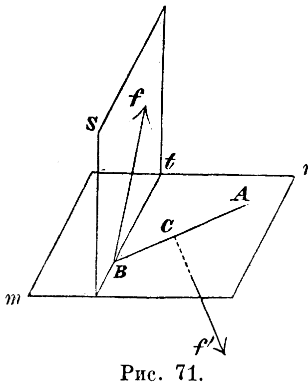


Рис. 71.

Такимъ образомъ мы видимъ, что равнодѣйствующая при данныхъ условіяхъ находится всегда, и при томъ—не единственная, ибо силы f и f', расположенныя въ плоскостяхъ mn и st, и замѣняющія данную систему силъ, не суть единственныя въ этихъ плоскостяхъ. Дѣйствительно, какъ мы уже видѣли, силу f можно разложить безчисленными способами на двѣ, f_1 и f_2, изъ которыхъ f_2, направляясь по Bt, давала-бы вмѣстѣ съ f' нѣкоторую новую силу f_1' въ плоскости mn; такимъ образомъ мы приходимъ къ новымъ силамъ f_1 и f_1', въ тѣхъ-же плоскостяхъ.

Величина составляющихъ X_0, Y_0, Z_0 равнодѣйствующей опредѣлится, подобно какъ въ случаяхъ (28) и (38), уравненіями

$$X_0 = A\,, \qquad AL + Y_0 M + Z_0 N = 0\,, \tag{75}$$

откуда видимъ, что одна изъ слагающихъ, Y_0 или Z_0, остается вполнѣ произвольною. Линія точекъ приложенія опредѣляется уравняніями

$$Y_0 z_0 - Z_0 y_0 = L\,, \qquad Z_0 x_0 - A z_0 = M\,, \qquad A y_0 - Y_0 x_0 = N\,, \tag{76}$$

откуда получаемъ координаты точекъ пересѣченія этой линіи

$$\begin{aligned} &\text{съ плоск. } (yz): \quad y_0' = \frac{N}{A}\,, \qquad z_0' = -\frac{M}{A}\,,\\ &\text{съ плоск. } (zx): \quad x_0'' = -\frac{N}{Y_0}\,, \qquad z_0'' = \frac{L}{Y_0}\,,\\ &\text{съ плоск. } (xy): \quad x_0''' = \frac{M}{Z_0}\,, \qquad y_0''' = -\frac{L}{Z_0}\,, \end{aligned} \tag{77}$$

откуда видимъ, что равнодѣйствующія всегда находятся, и при томъ— въ неопредѣленномъ числѣ.

---

4) Если одна изъ точекъ твердаго тѣла совершенно неподвижна, то перемѣщенія δa, δb, δc всегда равны нулю, и слѣдовательно, выбирая начало координатъ въ неподвижной точкѣ, мы прійдемъ только къ слѣдующимъ тремъ уравненіямъ равновѣсія:

$$\Sigma(Yz - Zy) = 0\,, \qquad \Sigma(Zx - Xz) = 0\,, \qquad \Sigma(Xy - Yx) = 0\,, \tag{78}$$

при чемъ величины A, B, C могутъ быть какія угодно. Значеніе этихъ уравненій состоитъ въ томъ, что геометрическая сумма приложенныхъ силъ должна въ случаѣ равновѣсія представляться линіею произвольной длины, проходящею черезъ неподвижную точку; а пара, которая вмѣстѣ, съ упомянутой геометрической суммою, замѣ-

няетъ систему приложенныхъ силъ, должна быть равна нулю. Если условія (78) не удовлетворяются, то всегда можно найти безчисленное множество такихъ силъ, изъ которыхъ каждая, вмѣстѣ съ данными, удовлетворяла-бы условіямъ равновѣсія. Силы, равныя и противоположныя упомянутымъ уравновѣшивающимъ, представятъ собою равнодѣйствующія, которыхъ тоже можно найти безчисленное множество.

§ 42. Равновѣсіе твердаго тѣла, съ двумя и болѣе несвободными точками.

Предположимъ, что нѣкоторыя двѣ точки (1) и (2) твердаго тѣла, координаты которыхъ суть соотвѣтственно x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, могутъ перемѣщаться вдоль по даннымъ двумъ поверхностямъ, или оставлять эти поверхности только въ опредѣленныя отъ нихъ стороны, по опредѣленному направленію ихъ нормалей (т. е. перпендикуляровъ къ ихъ касательнымъ плоскостямъ). Вообразимъ себѣ двѣ нормали къ той и другой поверхности, проведенныя черезъ тѣ точки этихъ послѣднихъ, въ которыхъ на нихъ опирается твердое тѣло въ своемъ положеніи равновѣсія своими точками (1) и (2). Положительныя направленія нормалей будемъ считать по нимъ въ сторону невозможныхъ перемѣщеній, и косинусы угловъ этихъ направленій съ произвольно выбранными осями координатъ назовемъ соотвѣтстренно черезъ l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2; проложенія какого нибудь изъ возможныхъ перемѣщеній на оси координатъ для точки (1) обозначимъ черезъ $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$, а для точки (2)—черезъ $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$. Тогда проложенія упомянутыхъ перемѣщеній соотвѣтственно на первую и вторую нормаль будутъ очевидно:

$$l_1\delta x_1 + m_1\delta y_1 + n_1\delta z_1 \quad \text{и} \quad l_2\delta x_2 + m_2\delta y_2 + n_2\delta z_2, \tag{79}$$

и такъ какъ точки могутъ перемѣщаться только или перпендикулярно къ соотвѣтственнымъ нормалямъ (т. е. по поверхностямъ), или въ ихъ отрицательную сторону, то выраженія (79) для всякихъ возможныхъ значеній $\delta x_1 \ldots, \delta x_2 \ldots$ должны очевидно быть или нулями, или отрицательными. Обозначая черезъ k_1 и k_2 двѣ какія нибудь произвольныя отрицательныя или положительныя дѣйствительныя величины, мы можемъ выразить упомянутыя условія слѣдующими двумя уравненіями:

$$
\begin{aligned}
l_1\delta x_1 + m_1\delta y_1 + n_1\delta z_1 &= -k_1^2 \\
l_2\delta x_2 + m_2\delta y_2 + n_2\delta z_2 &= -k_2^2.
\end{aligned} \tag{80}
$$

Выражая, съ помощію урр. (4), перемѣщенія по осямъ координатъ перемѣщеніями поступательными и вращательными, одинакими для всѣхъ точекъ тѣла, мы можемъ условія (80) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
& l_1\delta a + m_1\delta b + n_1\delta c \\
&+ (m_1z_1 - n_1y_1)\delta\alpha + (n_1x_1 - l_1z_1)\delta\beta + (l_1y_1 - m_1x_1)\delta\gamma = -k_1^2, \\
& l_2\delta a + m_2\delta b + n_2\delta c \\
&+ (m_2z_2 - n_2y_2)\delta\alpha + (n_2x_2 - l_2z_2)\delta\beta + (l_2y_2 - m_2x_2)\delta\gamma = -k_2^2.
\end{aligned} \tag{81}
$$

Вслѣдствіе этихъ условій, шесть произвольныхъ величинъ, входящія въ общее условіе равновѣсія твердаго тѣла,

$$
A\delta a + B\delta b + C\delta c + L\delta\alpha + M\delta\beta + N\delta\gamma \leqq 0, \tag{82}
$$

уже не могутъ быть разсматриваемы, какъ независимыя другъ отъ друга: таковыми будутъ только какія-либо четыре изъ этихъ величинъ; а остальныя двѣ опредѣлятся черезъ эти четыре съ помощію условій (81). Поступая также какъ въ § 29, умножимъ оба уравненія (81) соотвѣтственно на два неопредѣленныхъ множителя, λ_1 и λ_2, и сложимъ ихъ съ неравенствомъ (82). Получимъ:

$$
\begin{aligned}
&(A + \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2)\delta a + (B + \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2)\delta b + (C + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)\delta c \\
&\quad + [L + \lambda_1(m_1z_1 - n_1y_1) + \lambda_2(m_2z_2 - n_2y_2)]\delta\alpha \\
&\quad + [M + \lambda_1(n_1x_1 - l_1z_1) + \lambda_2(n_2x_2 - l_2z_2)]\delta\beta \\
&\quad + [N + \lambda_1(l_1y_1 - m_1x_1) + \lambda_2(l_2y_2 - m_2x_2)]\delta\gamma \leqq -\lambda_1k_1^2 - \lambda_2k_2^2,
\end{aligned} \tag{83}
$$

гдѣ $A, B \ldots L, M \ldots$ имѣютъ прежнее значеніе (11). Неопредѣленные множители выберемъ такъ, чтобы коефиціенты при двухъ какихъ либо изъ шести перемѣщеній обращались въ нули; тогда остальныя четыре перемѣщенія могутъ быть разсматриваемы, какъ совершенно произвольныя, вслѣдствіе чего для удовлетворенія неравенства (83) при всякихъ значеніяхъ этихъ произвольныхъ перемѣщеній потребуется, чтобы коеффиціенты и при остальныхъ четырехъ перемѣщеніяхъ были равны нулямъ. Такимъ образомъ, въ случаѣ равновѣсія должны удовлетворяться силами A, B, C и моментами L, M, N слѣдующія шесть уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
A+\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2&=0,\\
B+\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2&=0,\\
C+\lambda_1 n_1+\lambda_2 n_2&=0,\\
L+\lambda_1(m_1z_1-n_1y_1)+\lambda_2(m_2z_2-n_2y_2)&=0,\\
M+\lambda_1(n_1x_1-l_1z_1)+\lambda_2(n_2x_2-l_2z_2)&=0,\\
N+\lambda_1(l_1y_1-m_1x_1)+\lambda_2(l_2y_2-m_2x_2)&=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(84)$$

при чемъ

$$0 \leqq -\lambda_1 k_1^2-\lambda_2 k_2^2, \quad \text{т. е.} \quad \lambda_1<0 \quad \text{и} \quad \lambda_2<0. \qquad (85)$$

Два какія либо изъ уравненій (84) опредѣляютъ множителей λ_1 и λ_2, а остальныя четыре представляютъ собственно условія равновѣсія данныхъ силъ.

Видъ уравненій (84) показываетъ намъ, что величины λ_1 и λ_2 можно разсматривать, какъ двѣ силы, приложенныя къ данному тѣлу въ его точкахъ, (1) и (2), и направленныя соотвѣтственно въ отрицательныя стороны по двумъ нормалямъ къ поддерживающимъ поверхностямъ, т. е. отъ стороны невозможныхъ перемѣщеній въ сторону возможныхъ. Дѣйствительно, урр. (84) показываютъ, что если упомянутыя двѣ силы λ_1 и λ_2 будутъ приложены указаннымъ способомъ къ свободному твердому тѣлу, то эти двѣ силы, вмѣстѣ съ данными силами и моментами, будутъ въ равновѣсіи. Такимъ образомъ, вліяніе обоихъ поддерживающихъ элементовъ поверхностей на данную систему силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ двухъ силъ λ_1 и λ_2, приложенныхъ къ тому-же тѣлу въ мѣстахъ его соприкосновенія съ поддерживающими поверхностями. Поэтому силы λ_1 и λ_2 носятъ названіе *сопротивленій поверхностей* противъ данной системы силъ, а силы обратныя, т. е. $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, называются *давленіями* на поверхности, обусловленными данною системою силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, опирающемуся на эти поверхности.

Если твердое тѣло опирается болѣе чѣмъ на двѣ поверхности, то къ условіямъ (81) прибавятся еще новыя, составленныя такимъ-же образомъ и относящіяся къ новымъ элементамъ поддерживающихъ поверхностей, нормали къ которымъ считаются въ томъ-же смыслѣ, какъ прежде; величины k при этомъ могутъ быть и нулями для частныхъ случаевъ, когда точки твердаго тѣла совсѣмъ не могутъ

перемѣщаться перпендикулярно къ соотвѣтствующимъ поверхностямъ. Умножая упомянутыя условныя уравненія на новые неопредѣленные множители, и складывая ихъ, какъ прежде, съ общимъ условіемъ равновѣсія (82), мы прійдемъ къ шести уравненіямъ равновѣсія, подобнымъ (84) и содержащимъ столько неопредѣленныхъ множителей, сколько дано различныхъ точекъ тѣла, соприкасающихся съ различными поддерживающими поверхностями.

Если твердое тѣло опирается на данную плоскость болѣе чѣмъ одною точкою, то отдѣльныя давленія въ каждой изъ такихъ точекъ опоры остаются не вполнѣ опредѣленными. Дѣйствительно, предположимъ, что твердое тѣло опирается какимъ угодно числомъ своихъ точекъ на плоскость, которую мы выберемъ за плоскость (xy); тогда въ уравн. (84) всѣ l и m будутъ нули, а всѣ n—единицы; кромѣ того всѣ z тоже очевидно будутъ нулями; вслѣдствіе этого уравн. (84) превратятся въ

$$\begin{gathered} A=0\,,\quad B=0\,,\quad C+\Sigma\lambda=0\,,\\ L-\Sigma\lambda y=0\,,\quad M+\Sigma\lambda x=0\,,\quad N=0\,, \end{gathered} \tag{84'}$$

гдѣ знакъ Σ обозначаетъ сумму, взятую отъ различныхъ слагаемыхъ. Приведенныя уравненія показываютъ, что только три изъ нихъ служатъ для опредѣленія произвольнаго числа множителей λ; а остальныя три суть собственныя условія равновѣсія данныхъ силъ. Слѣдовательно, каждое изъ давленій на одну и туже плоскость можетъ быть предположено какимъ угодно, лишь-бы сумма ихъ и моменты около оси, перпендикулярной къ плоскости опоры, были равны и противоположны даннымъ величинамъ C, L и M.

Случай одной поверхности опоры, разсмотрѣнный въ предыдущемъ параграфѣ, является какъ частный настоящаго, если принять одно только изъ условій (81) и выбрать оси координатъ такъ, чтобы

$$x_1=y_1=z_1=0 \quad \text{и} \quad l_1=m_1=0\,,\quad n_1=1.$$

Если данныя силы не удовлетворяютъ условій равновѣсія (84), то мы можемъ задаться вопросомъ, какія силы, или какія условія связности, должны быть прибавлены къ существующимъ уже, чтобы равновѣсіе имѣло мѣсто. Если упомянутыя уравновѣшивающія силы будутъ найдены, то силы имъ прямо противоположныя и равныя могутъ быть разсматриваемы, какъ равнодѣйствующія данной системы силъ при данныхъ условіяхъ. Вопросъ о нахожденіи равнодѣйствующихъ тогда имѣетъ преимущественный интересъ, когда

является возможность найти одну равнодѣйствующую силу. Если X_0, Y_0, Z_0 и x_0, y_0, z_0 будутъ слагающія по осямъ координатъ и координаты точки приложенія такой равнодѣйствующей, то помня, что сила равная и противоположная этой послѣдней, вмѣстѣ съ данною системою силъ, должна удовлетворять условіямъ равновѣсія (84), мы найдемъ слѣдующія уравненія для опредѣленія вышеприведенныхъ шести величинъ, характеризирующихъ искомую равнодѣйствующую:

$$\begin{aligned} X_0 &= A + \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 + \cdots, \\ Y_0 &= B + \lambda_1 m_1 + \cdots\cdots, \\ Z_0 &= C + \lambda_1 n_1 + \cdots\cdots, \\ Y_0 z_0 - Z_0 y_0 &= L + \lambda_1 (m_1 z_1 - n_1 y_1) + \lambda_2 (m_2 z_2 - n_2 y_2) + \cdots, \\ Z_0 x_0 - X_0 z_0 &= M + \lambda_1 (n_1 x_1 - l_1 z_1) + \cdots\cdots, \\ X_0 y_0 - Y_0 x_0 &= N + \lambda_1 (l_1 y_1 - m_1 x_1) + \cdots\cdots. \end{aligned} \tag{86}$$

Предыдущія уравненія позволяютъ намъ легко замѣтить, что искомая равнодѣйствующая можетъ быть также разсматриваема, какъ равнодѣйствующая нѣкоторой системы силъ, приложенныхъ съ совершенно свободному твердому тѣлу: эта систета силъ состоитъ очевидно изъ данныхъ силъ, опредѣляемыхъ ихъ геометрическою суммою (A, B, C) и ихъ моментомъ около начала координатъ (L, M, N), и изъ силъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$, приложенныхъ къ точкамъ (1), (2), (3) и т. д. Для того чтобы такая система силъ могла быть замѣнена одною равнодѣйствующею, должно, на основаніи $(9)'$, выполняться слѣдующее условіе:

$$\begin{aligned} &(A + \lambda_1 l_1 + \cdots)[L + \lambda_1 (m_1 z_1 - n_1 y_1) + \cdots] \\ &+ (B + \lambda_1 m_1 + \cdots)[M + \lambda_1 (n_1 x_1 - l_1 z_1) + \cdots] \\ &+ (C + \lambda_1 n_1 + \cdots)[N + \lambda_1 (l_1 y_1 - m_1 x_1) + \cdots] = 0, \end{aligned} \tag{87}$$

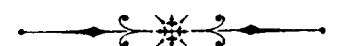
которое получается изъ (86), если три послѣднія изъ этихъ уравненій помножить соотвѣтственно на X_0, Y_0, Z_0 и сложить, замѣнивъ при этомъ величины X_0, Y_0, Z_0 ихъ значеніями изъ первыхъ трехъ урр. (86). Величины $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ въ условіи (87) могутъ быть разсматриваемы какъ произвольныя; но, на основаніи (85)—всегда какъ отрицательныя. Дѣйствительно, подыскавши для каждой λ одно или нѣсколько значеній, при которыхъ условіе (87) удовлетворялось-бы, мы всегда найдемъ соотвѣтствующія равнодѣйствующія, подставляя упомянутыя значенія всѣхъ λ въ уравненія (86). Слѣдовательно, мы

получимъ вообще столько возможныхъ рѣшеній для равнодѣйствующихъ изъ урр. (86), сколько возможныхъ рѣшеній получается для величинъ λ изъ уравненія (87), рѣшеннаго относительно этихъ послѣднихъ, какъ неизвѣстныхъ.

Если найдены величины X_0; Y_0, Z_0 слагающихъ равнодѣйствующей, то величины $-X_0$, $-Y_0$, $-Z_0$ будутъ, какъ извѣстно, слагающими уравновѣшивающей, которая пройдетъ черезъ тѣже точки приложенія, какъ первая. Вообразимъ себѣ нѣкоторую плоскость, перпендикулярную къ равнодѣйствующей силѣ и касающуюся твердаго тѣла въ той точкѣ, черезъ которую линія точекъ приложеній равнодѣйствующей выходитъ изъ этого послѣдняго. Если расположенная такимъ способомъ плоскость будетъ непроницаема для твердаго тѣла, то ея присутствіемъ сила (X_0, Y_0, Z_0) будетъ уравновѣшена, и это присутствіе слѣдовательно будетъ эквивалентно существованію уравновѣшивающей $(-X_0, -Y_0, -Z_0)$, которую упомянутая плоскость, или соотвѣтствующій элементъ нѣкоторой поверхности, можетъ собою замѣнить. Такое-же заключеніе будетъ очевидно слѣдовать изъ уравненій равновѣсія (86), если мы въ эти послѣднія введемъ такія величины λ_0, l_0, m_0, n_0, которыя опредѣляются условіями:

$$\begin{gathered}\lambda_0 l_0 = -X_0, \quad \lambda_0 m_0 = -Y_0, \quad \lambda_0 n_0 = -Z_0, \\ l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1,\end{gathered} \tag{88}$$

при чемъ очевидно λ_0 представитъ сопротивленіе нѣкоторой поверхности, косинусы угловъ нормали къ которой, въ точкѣ (x_0, y_0, z_0) ея соприкосновенія съ твердымъ тѣломъ, будутъ l_0, m_0, n_0. Такимъ образомъ, разысканіе равнодѣйствующей, или уравновѣшивающей, совершенно тождественно съ разысканіемъ нѣкоторой плоскости, которую можно назвать у д е р ж и в а ю щ е ю. Уравненія (88) позволяютъ по найденной удерживающей плоскости найти равнодѣйствующую, или на оборотъ,



Предположимъ для примѣра, что тяжелое тѣло опирается тремя точками на нѣкоторую плоскость, и найдемъ условія его равновѣсія. Плоскость опоры выберемъ за плоскость (xy), а перпендикуляръ къ ней, въ сторону невозможныхъ перемѣщеній (т. е. внизъ)—за ось z-овъ. Начало координатъ выберемъ въ первой точкѣ опоры, и

ось x-овъ проведемъ черезъ вторую точку опоры; тогда координаты трехъ точекъ опоры будутъ соотвѣтственно: $(0, 0, 0)$, $(x_2, 0, 0)$, $(x_3 . y_3, 0)$. Координаты центра тяжести, расположеннаго очевидно въ сторонѣ отрицательныхъ z-овъ, обозначимъ черезъ a, b, $-c$, и косинусы угловъ направленія силы тяжести съ осями координатъ— черезъ α, β, γ; а величину самой силы тяжести—черезъ F. Тогда мы будемъ имѣть въ условіяхъ равновѣсія (84) всѣ l и всѣ m равными нулю, а всѣ n равными единицѣ. Самыя-же уравненія (84) должны содержать три неопредѣленныхъ отрицательныхъ множителя $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, и принимать нижеслѣдующій видъ:

$$F\alpha = 0, \quad F\beta = 0, \quad F\gamma + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \text{и т. д.}$$

Изъ этихъ первыхъ трехъ уравненій мы уже видимъ, что α и β должны быть нулями, а слѣдовательно γ единицею и притомъ—положительною, такъ какъ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ должны быть по условію отрицательными. Слѣдовательно прежде всего, плоскость должна быть перпендикулярна къ направленію тяжести, т. е. горизонтальна; направленіе невозможныхъ отъ нея перемѣщеній должно совпадать тоже съ силою тяжести. Въ такомъ предположеніи изъ уравненій (84) останутся только 3-е, 4-е, 5-е, которыя превратятся въ

$$\begin{aligned} F + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ -Fb - \lambda_3 y_3 &= 0, \\ Fa + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{89}$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$\lambda_3 = -F\frac{b}{y_3}, \tag{90}$$

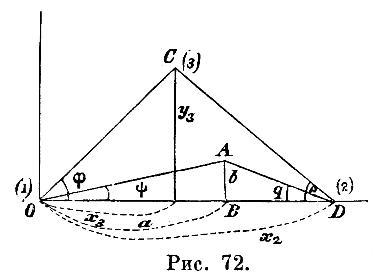


Рис. 72.

откуда видимъ, что b и y_3 должны имѣть одинаковый знакъ; т. е. проложеніе A (рис. 72) центра тяжести на поддерживающую плоскость и точка (3) должны лежать по одну сторону отъ линіи x-овъ, такъ какъ λ_3 должно быть всегда отрицательнымъ. Третье изъ уравненій (89) даетъ, вслѣдствіе (90):

$$\lambda_2 = F\left(\frac{bx_3}{y_3 x_2} - \frac{a}{x_2}\right), \tag{91}$$

при чемъ всегда должно быть

$$\frac{b}{y_3 x_2} - \frac{a}{x_2} < 0 \quad \text{или} \quad a y_3 - b x_3 > 0 . \qquad (91)'$$

Обозначая углы, которые линіи $\overline{OC}$ и $\overline{OA}$ дѣлаютъ съ осью x-овъ, черезъ φ и ψ, и помня, что

$$x_3 = \overline{OC}\cos\varphi , \qquad y_3 = \overline{OC}\sin\varphi ,$$
$$a = \overline{OA}\cos\psi , \qquad b = \overline{OA}\sin\psi ,$$

мы можемъ условіе $(91)'$ представить въ видѣ:

$$\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi > 0,$$

или: (92)

$$\sin(\varphi - \psi) > 0 ,$$

откуда заключаемъ, что линія $\overline{OA}$ должна лежать внутри угла φ. Наконецъ, опредѣляя λ_1 изъ перваго ур. (89), мы получаемъ:

$$\lambda_1 = -F\left(1 - \frac{b}{y_3} - \frac{a}{x_2} + \frac{b x_3}{y_3 x_2}\right), \qquad (93)$$

откуда заключаемъ, что

$$x_2 y_3 - b x_2 - a y_3 + b x_3 > 0 ; \qquad (93)'$$

обозначая углы, которые линіи $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$ дѣлаютъ съ отрицательнымъ направленіемъ оси x-овъ, черезъ p и q, мы будемъ имѣть:

$$x_2 = a + \overline{DA}\cos q , \qquad y_3 = \overline{DC}\sin p , \qquad b = \overline{DA}\sin q$$
$$x_3 = x_2 - \overline{DC}\cos p = a + \overline{DA}\cos q - \overline{DC}\cos p ,$$

вслѣдствіе чего условіе $(93)'$, какъ легко вычислить, превращается въ

$$\sin(p - q) > 0 , \qquad (94)$$

которое показываетъ, что линія $\overline{DA}$ должна лежать внутри угла p. Условія (92) и (94) очевидно выражаютъ требованіе, чтобы въ случаѣ равновѣсія проложеніе центра тяжести на плоскость опоры лежало внутри треугольника OCD, вершины котораго образованы тремя точками опоры. Случай, когда тѣло опирается на плоскость двумя точками, можно разсматривать, какъ частный предыдущаго, при чемъ двѣ точки, (2) и (3), сливаются въ одну. Тогда очевидно, площадь треугольника OCD превращается въ прямую линію, и условіемъ равновѣсія будетъ то, чтобы вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести, пересѣкала прямую линію, соединяющую обѣ точки опоры, и притомъ—между обѣими этими точками.

Опредѣлимъ теперь равнодѣйствующую силы тяжести, которая дѣйствуетъ на твердое тѣло, опирающееся тремя точками на наклонную плоскость. Оси координатъ выберемъ также, какъ въ соотвѣтствующемъ примѣрѣ (§ 41, рис. 68), т. е. ось z-овъ перпендикулярно къ плоскости, внизъ, начало координатъ—въ одной изъ точекъ опоры, ось x-овъ параллельно вертикальной плоскости, проходящей черезъ центръ тяжести тѣла, и слѣдовательно—параллельно линіи пересѣченія этой послѣдней плоскости съ данною наклонною плоскостію. Въ такомъ случаѣ величины $A, B, .. L, M.$, выразятся, какъ въ (61). Координаты трехъ течекъ опоры будутъ соотвѣтственно: $(0, 0, 0)$, $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, y_2, 0)$; кромѣ того всѣ l и m—нули, и всѣ n—единицы. Поэтому мы будемъ имѣть сообразно съ (61):

$$\begin{gathered} A = F\sin\gamma, \quad B = 0, \quad C = F\cos\gamma, \\ L = -bF\cos\gamma, \quad M = F(a\cos\gamma + c\sin\gamma), \quad N = bF\sin\gamma, \end{gathered} \tag{95}$$

при чемъ урр. (86), опредѣляющія равнодѣйствующую, обратятся въ

$$\begin{gathered} X_0 = F\sin\gamma, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = F\cos\gamma + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ Z_0 y_0 = bF\cos\gamma + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \\ Z_0 x_0 - F\sin\gamma . z_0 = aF\cos\gamma + bF\sin\gamma + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \quad y_0 = b, \end{gathered} \tag{96}$$

а уравненіе (87) въ

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) b = \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3. \tag{97}$$

Послѣднее изъ урр. (96) показываетъ, что равнодѣйствующая всегда лежитъ въ одной вертикальной плоскости съ силою F. Уравненіе (97) опредѣляетъ возможныя соотношенія между тремя величинами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Третье изъ урр. (96) опредѣляетъ слагающую Z_0; четвертое ур. (96), на основаніи (97), тождественно съ предыдущимъ; а пятое опредѣляетъ линію точекъ приложенія равнодѣйствующей въ плоскости $y = b$. Множители λ представляютъ очевидно тѣ сопротивленія, которыя плоскость оказываетъ тѣлу въ трехъ точкахъ опоры, когда это тѣло уравновѣшено на плоскости тою или другою силою, прямо противоположною и равною какой-либо изъ системы равнодѣйствующихъ. При различныхъ равнодѣйствующихъ очевидно, и соотвѣтствующія сопротивленія будутъ различны. Если мы желаемъ, чтобы сопротивленія въ указанномъ случаѣ равновѣсія были нулями, то должны выбрать равнодѣйствующую, равную F и приложенную къ центру тяжести тѣла, что непосредственно видно изъ урр. (96).

Возможныя направленія равнодѣйствующихъ представятся въ данномъ случаѣ также, какъ на рисункѣ 70, (§ 41); но выборъ линіи точекъ приложенія для каждой слагающей останется до нѣкоторой степени произволенъ, ибо въ четвертое изъ урр. (96), опредѣляющее эту линію въ плоскости $y=b$, входятъ два множителя λ_2 и λ_3, которые могутъ быть опредѣлены уравненіями

$$\begin{aligned} Z_0 &= F\cos\gamma + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\,, \\ (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)b &= \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3\,, \end{aligned} \tag{98}$$

содержащими, при выбранномъ Z_0, три неопредѣленныя величины, изъ которыхъ одна останется слѣдовательно произвольною. Такимъ образомъ, уравновѣшивающую, выбранной величины, мы можемъ всегда приложить къ тѣлу такимъ способомъ, чтобы любое изъ давленій на три точки опоры имѣло предписанную ему величину.

Если двѣ точки твердаго тѣла совершенно неподвижны, то обозначая черезъ x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 координаты этихъ точекъ, и помня, что ихъ перемѣщенія $\delta x_1 \ldots \delta x_2 \ldots$ должны быть равны нулю, мы, на основаніи урр. (4) (стр. 224), получимъ слѣдующія соотношенія между перемѣщеніями $\delta a, \delta b \ldots \delta\alpha, \delta\beta \ldots$:

$$\begin{aligned} &\delta a + y_1\delta\gamma - z_1\delta\beta = 0\,, && \delta a + y_2\delta\gamma - z_2\delta\beta = 0\,, \\ &\delta b + z_1\delta\alpha - x_1\delta\gamma = 0\,, && \delta b + z_2\delta\alpha - x_2\delta\gamma = 0\,, \\ &\delta c + x_1\delta\beta - y_1\delta\alpha = 0\,, && \delta c + x_2\delta\beta - y_2\delta\alpha = 0\,, \end{aligned} \tag{99}$$

которыя приводятся къ пяти независимымъ другъ отъ друга уравненіямъ, ибо изъ нихъ возможно опредѣлить только отношенія какихъ-либо пяти изъ упомянутыхъ перемѣщеній къ шестому, остающемуся произвольнымъ. Кромѣ того, умножая первыя три уравненія соотвѣтственно на x_1, y_1, z_1 и складывая, получаемъ:

$$x_1\delta a + y_1\delta b + z_1\delta c = 0\,; \tag{100}$$

точно также изъ другихъ трехъ уравненій имѣемъ:

$$x_2\delta a + y_2\delta b + z_2\delta c = 0. \tag{101}$$

Затѣмъ легко видѣть, что, на основаніи (100) и (101), третье изъ урр. (99) получится изъ двухъ предыдущихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на x_1, y_1 и сложенныхъ; точно также шестое изъ урр. (99) получается тоже изъ двухъ ему предшествующихъ.

Выбирая одну изъ неподвижныхъ точекъ за начало координатъ и проводя ось z-овъ черезъ другую точку, мы будемъ очевидно имѣть:

$$x_2 = y_2 = z_2 = 0\,, \qquad x_1 = y_1 = 0\,,$$

вслѣдствіе чего условія (99) приведутся къ пяти такимъ:

$$\delta a = 0, \quad \delta b = 0, \quad \delta c = 0, \quad \delta\alpha = 0, \quad \delta\beta = 0, \tag{102}$$

которыя показываютъ, что изъ шести перемѣщеній можетъ оставаться произвольнымъ только одно $\delta\gamma$. Поэтому общее условіе (26) равновѣсія твердаго тѣла приводится для даннаго случая къ одному уравненію:

$$\sum(Xy - Yz) = 0\,, \tag{103}$$

выражающему, что моментъ данныхъ силъ около неподвижной оси (или, что все равно, сумма моментовъ всѣхъ силъ около этой оси) долженъ быть равенъ нулю.

Примѣчаніе. Двѣ неизмѣнно соединенныя другъ съ другомъ точки приложенія силъ, вращающіяся около неподвижнаго центра, лежащаго на линіи ихъ соединенія, носятъ названіе рычага, и при томъ—перваго рода, если обѣ точки лежатъ по разнымъ сторонамъ отъ неподвижнаго центра, и—втораго рода, если онѣ лежатъ по одну сторону отъ этого центра. Условія равновѣсія рычага сами собою очевидны изъ разобранныхъ выше условій равновѣсія неизмѣняемой системы.

§ 43. Распредѣленіе давленій на плоскостяхъ опоры.

Предположимъ, что твердое тѣло опирается на данную плс не одною точкою, но конечною плоскою частію своей повер т. е. безчисленнымъ множествомъ точекъ. Въ такомъ случа ненія равновѣсія (84) будутъ содержать столько различн жителей $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, сколько точекъ опоры, т. е. безчисле жество; но для всѣхъ точекъ опоры величины l, m, n очевидно однѣ и тѣже, такъ какъ всѣ эти точки лежатт плоскости. Такимъ образомъ, уравненія равновѣсія (84) ся для даннаго случая въ слѣдующемъ видѣ:

$$A + l\Sigma\lambda = 0\,, \quad B + m\Sigma\lambda = 0\,, \quad C + n\Sigma\lambda = 0\,. \tag{104}$$

$$\begin{aligned} L + m\Sigma\lambda z - n\Sigma\lambda y = 0\,, &\qquad \Sigma k^2\lambda \leqq 0\,, \\ M + n\Sigma\lambda x - l\Sigma\lambda z = 0\,, &\qquad \text{т. е.} \\ N + l\Sigma\lambda y - m\Sigma\lambda x = 0\,, &\qquad \text{каждое } \lambda \leqq 0\,, \end{aligned} \tag{105}$$

гдѣ знакъ Σ обозначаетъ сумму различныхъ слагаемыхъ. Изъ этихъ уравненій мы легко видимъ, что

$$AL + BM + CN = 0\,, \tag{106}$$

откуда заключаемъ, что данная система силъ должна имѣть одну равнодѣйствующую, слагающими которой будутъ A, B, C, приложенныя къ одной точкѣ. Если координаты одной изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей обозначимъ черезъ x_0, y_0, z_0, то очевидно должны будетъ имѣть:

$$L = Bz_0 - Cy_0\,, \quad M = Cx_0 - Az_0\,, \quad N = Ay_0 - Bx_0\,, \tag{107}$$

вслѣдствіе чего урр. (105) превращаются въ

$$\begin{aligned} Bz_0 - Cy_0 + m\Sigma\lambda z - n\Sigma\lambda y &= 0\,, \\ Cx_0 - Az_0 + n\Sigma\lambda x - l\Sigma\lambda z &= 0\,, \\ Ay_0 - Bx_0 + l\Sigma\lambda y - m\Sigma\lambda x &= 0\,. \end{aligned} \tag{108}$$

Кромѣ того изъ уравненій (104) и (105) находимъ, что

$$\begin{aligned} \Sigma\lambda &= -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,, \\ Al + Bm + Cn &= -\Sigma\lambda\,, \end{aligned} \tag{109}$$

и слѣдовательно

$$Al + Bm + Cn = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,. \tag{110}$$

Но такъ какъ величина равнодѣйствующей силъ A, B, C есть

$$F = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,,$$

и такъ какъ

$$A = F\alpha\,, \quad B = F\beta\,, \quad C = F\gamma\,,$$

гдѣ α, β, γ суть косинусы угловъ F съ осями координатъ, то ур. (110) даетъ:

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 1\,, \tag{111}$$

откуда заключаемъ, что уголъ между нормалью къ плоскости опоры

и равнодѣйствующей есть нуль, т. е. F должна быть направлена перпендикулярно къ этой плоскости. Величина равнодѣйствующей, какъ показываютъ урр. (109), можетъ быть произвольная, лишь-бы она была направлена перпендикулярно къ плоскости (l, m, n), въ сторону невозможныхъ перемѣщеній. Подставляя въ (108) значенія A, B, C изъ (104), мы получаемъ:

$$\begin{aligned} m(z_0\Sigma\lambda - \Sigma\lambda z) - n(y_0\Sigma\lambda - \Sigma\lambda y) = 0\,, \\ n(x_0\Sigma\lambda - \Sigma\lambda x) - l(z_0\Sigma\lambda - \Sigma\lambda z) = 0\,, \\ l(y_0\Sigma\lambda - \Sigma\lambda y) - m(x_0\Sigma\lambda - \Sigma\lambda x) = 0\,, \end{aligned} \tag{112}$$

откуда видимъ, что одна изъ точекъ приложенія F имѣетъ координаты

$$x_0 = \frac{\Sigma\lambda x}{\Sigma\lambda}\,, \qquad y_0 = \frac{\Sigma\lambda y}{\Sigma\lambda}\,, \qquad z_0 = \frac{\Sigma\lambda z}{\Sigma\lambda}\,, \tag{113}$$

ибо эти величины удовлетворяютъ уравненіямъ линіи точекъ приложенія (112). Сравнивая выраженія (113) съ (25) мы замѣчаемъ, что точка приложенія силы F опредѣляется, какъ центръ параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ каждой точкѣ площади опоры. Но такъ какъ центръ параллельныхъ силъ не можетъ очевидно лежать въ сторонѣ отъ всѣхъ ихъ точекъ приложенія, если всѣ силы направлены въ одну сторону, то заключаемъ, что точка приложенія силы F, или что все равно, силы—$\Sigma\lambda$, не можетъ лежать по одну сторону отъ всѣхъ точекъ контура площади опоры, а должна помѣщаться внутри онаго.

Каждая изъ безчисленнаго множества величинъ λ, входящихъ въ выше приведенныя условія равновѣсія подпертаго твердаго тѣла, представляетъ собою, какъ было объяснено въ предыдущемъ параграфѣ, давленіе соотвѣтствующей точки плоскости опоры на твердое тѣло. Для каждой изъ системъ взаимно уравновѣшивающихся силъ, приложенныхъ къ одному и тому-же подпертому твердому тѣлу, величины давленій λ будутъ различны, и для каждаго соотвѣтственнаго случая опредѣлятся изъ урр. (104) и (105) въ функціи данныхъ величинъ $A, B \ldots L, M \ldots$. Но легко замѣтить, что упомянутыя уравненія послужатъ къ опредѣленію не каждой изъ безчисленнаго множества величинъ λ, а только функцій отъ этихъ величинъ такого вида:

$$\Sigma\lambda\,, \qquad \Sigma\lambda x\,, \qquad \Sigma\lambda y\,, \qquad \Sigma\lambda z \tag{114}$$

т. е. соотвѣтственно величины равнодѣйствующей давленій и (по (113))

координатъ ея точки приложенія въ плоскости опоры. При этомъ три послѣднія изъ функцій (114) связаны между собою тѣмъ условіемъ, что координаты x, y, z, входящія въ нихъ, принадлежатъ точкамъ, лежащимъ въ одной и той-же плоскости опоры. Если мы обозначимъ черезъ h длину перпендикуляра, опущеннаго на эту плоскость изъ начала координатъ, то очевидно, что *)

$$lx + my + nz = h\,, \tag{115}$$

откуда:

$$l\Sigma\lambda x + m\Sigma\lambda y + n\Sigma\lambda z = h\Sigma\lambda\,. \tag{116}$$

Такимъ образомъ, урр. (104) и (105) разбиваются на двѣ группы: одна группа, получаемая исключеніемъ изъ этихъ уравненій величинъ (114), представится тремя уравненіями:

$$\begin{aligned} A : B : C &= l : m : n, \\ AL + BM + CN &= 0, \end{aligned} \tag{117}$$

и выразитъ условія равновѣсія данной системы силъ. Другая группа, вмѣстѣ съ (116), опредѣлитъ величину и точку приложенія равнодѣйствующей давленій слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \Sigma\lambda &= -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,, \\ \Sigma\lambda x &= mN - nM - Ah\,, \\ \Sigma\lambda y &= nL - lN - Bh\,, \\ \Sigma\lambda z &= lM - mL - Ch\,. \end{aligned} \tag{118}$$

Такъ какъ урр. (118) опредѣляютъ сумму безконечно большаго числа различныхъ величинъ λ, какъ нѣкоторую конечную величину, то мы заключаемъ, что каждое слагаемое λ изъ суммы $\Sigma\lambda$ должно быть безконечно малымъ. Слѣдовательно, на каждый безконечно малый элементъ площади опоры величина давленія тоже будетъ безконечно мала, но настолько, что складывая всѣ безконечныя малыя давленія всѣхъ элементовъ данной плоскости опоры, мы получимъ конечную сумму $\Sigma\lambda$. Такимъ образомъ, данное давленіе мы можемъ

*) Дѣйствительно, если ρ будетъ разстояніе какой либо точки (x, y, z) плоскости отъ начала координатъ, то $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$ будутъ косинусы угловъ линіи ρ съ осями координатъ, и $\cos(\rho, h) = l\frac{x}{\rho} + m\frac{y}{\rho} + n\frac{z}{\rho}$; но съ другой стороны очевидно, $\cos(\rho, h) = \frac{h}{\rho}$; слѣдовательно, $lx + my + nz = h$.

всегда разсматривать, какъ сумму безконечно большаго числа давленій на безконечно малые элементы площади поверхности опоры. Какъ величина каждаго изъ такихъ элементовъ площадей, такъ и величина давленія на него, могутъ быть выбраны совершенно произвольно, лишь-бы сумма элементовъ представила данную площадь, и сумма соотвѣтствующихъ давленій—давленіе $\Sigma\lambda$, приложенное къ точкѣ, координаты которой суть $\frac{\Sigma\lambda x}{\Sigma\lambda}$, $\frac{\Sigma\lambda y}{\Sigma\lambda}$, $\frac{\Sigma\lambda z}{\Sigma\lambda}$; т. е. вмѣсто суммы давленій приложенныхъ къ различнымъ точкамъ плоскости опоры, мы можемъ разсматривать сумму давленій, приложенныхъ къ различнымъ безконечно малымъ элементамъ площади этой плоскости. Но такъ какъ упомянутые элементы площади могутъ быть нами выбраны меньше всякой данной величины, то наше представленіе о давленіяхъ, какъ о силахъ, распредѣленныхъ по различнымъ точкамъ приложенія, мы можемъ вполнѣ отождествить съ представленіемъ о силахъ, распредѣленныхъ по различнымъ элементамъ поверхности, и при томъ различныхъ для различныхъ элементовъ. Но для различныхъ частей одного и того-же элемента давленія могутъ быть разсматриваемы какъ одинакія.

Къ тому-же самому способу представленія о распредѣленіи давленій по элементамъ поверхности мы приходимъ также на основаніи слѣдующихъ разсужденій. Самое простое изъ всѣхъ распредѣленій давленій, какое только мы можемъ себѣ представить, будетъ очевидно равномѣрное, т. е. такое, при которомъ къ каждой точкѣ поверхности приложены одинакія силы. При равномѣрномъ распредѣленіи, давленія на равныя, произвольно выбранныя части поверхости, будутъ одинаковы, и давленіе p на каждую единицу поверхности опредѣлится, какъ частное

$$\frac{\Sigma\lambda}{S}=p, \tag{119}$$

гдѣ S есть величина той части площади поверхности опоры, къ которой приложено давленіе $\Sigma\lambda$. Слѣдовательно, давленіе на какой либо безконечно малый элементъ поверхности, величины dS, будетъ pdS, причемъ величина p для каждаго изъ элементовъ поверхности будетъ очевидно одна и таже. При всякомъ иномъ, перемѣнномъ распредѣленіи давленій, условіе равенства давленій на любыя равныя части поверхности не удовлетворяется. Но въ такомъ слу-

чаѣ мы можемъ разбить площадь данной поверхности на произвольное число частей, и на каждой изъ этихъ частей вообразить себѣ такое равномѣрное распредѣленіе давленій, что ихъ суммы для каждой изъ частей будутъ равны результирующимъ данныхъ давленій, дѣйствующихъ на эти части. Чѣмъ меньше мы выберемъ упомянутыя дѣленія поверхности, тѣмъ ближе комбинація воображаемыхъ различныхъ равномѣрныхъ распредѣленій давленій будетъ подходить къ данному распредѣленію давленій, и будетъ наконецъ отъ этого послѣдняго отличаться безконечно мало, если площадь поверхности мы разобьемъ на безконечно большое число безконечно малыхъ элементовъ. Такимъ образомъ, въ предѣлѣ мы можемъ представить себѣ всякое распредѣленіе давленій по данной поверхности, какъ рядъ равномѣрныхъ давленій различной величины, приложенныхъ къ каждому элементу поверхности; при этомъ величина давленія на какой либо элементъ dS поверхности можетъ быть представлена въ видѣ pdS, гдѣ p имѣетъ тоже значеніе, что въ (119), только для каждаго элемента различается по величинѣ, и представляетъ, очевидно, то давленіе, которое имѣло-бы мѣсто для единицы поверхности, если бы на каждый изъ числа $\frac{1}{dS}$ ея элементовъ производилось одно и тоже давленіе pdS. Величина p можетъ быть названа силою или напряженіемъ давленія въ данномъ элементѣ поверхности. Понятіе о напряженіи давленія относится очевидно къ понятіямъ давленія и площади, какъ понятіе скорости—къ длинѣ и времени.

Наименованіе единицы силы давленія явствуетъ изъ ниже слѣдующихъ соотношеній, вытекающихъ изъ (119):

$$\text{ед. сил. давл.} = \frac{\text{един. давл.}}{\text{един. площ.}} = \frac{\text{дина}}{\text{цен}^2} = \frac{\text{грам.}}{\text{сек.}^2\ \text{цент.}} \qquad (120)$$

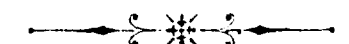
Итакъ, полагая, на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, для каждой точки поверхности опоры, или, что все равно, для каждаго элемента этой послѣдней,

$$\lambda = pdS\,, \qquad (121)$$

мы получимъ, на основаніи (118), слѣдующія уравненія для опредѣленія безчисленнаго множества различныхъ величинъ p для различныхъ элементовъ данной плоскости опоры:

$$\begin{aligned}\Sigma p dS &= -\sqrt{A^2+B^2+C^2},\\ \Sigma p x dS &= mN - nM - Ah,\\ \Sigma p y dS &= nL - lN - Bh,\\ \Sigma p z dS &= lM - mL - Ch,\end{aligned} \tag{122}$$

гдѣ суммы лѣвыхъ частей берутся по всѣмъ элементамъ поверхности. Очевидно, что четыре уравненія (122) не могутъ опредѣлить всего безконечно большаго числа величинъ p, и что мы можемъ представлять себѣ произвольно то или другое распредѣленіе напряженій давленій по элементамъ поверхности подъ однимъ лишь условіемъ, чтобы каждое изъ такихъ произвольно выбранныхъ распредѣленій удовлетворяло уравненіямъ (122).



Разсмотримъ теперь, какія можно сдѣлать самыя простыя предположенія о распредѣленіи силъ давленій на данной площади, при вышесказанныхъ условіяхъ. Простѣйшее предположеніе очевидно будетъ то, что величины p для каждаго элемента поверхности однѣ и тѣже, т. е. что

$$p = p_0, \tag{123}$$

гдѣ p_0 есть нѣкоторая постоянная величина, не зависящая отъ того или другаго положенія элемента dS. Въ такомъ случаѣ, помня, что $\Sigma dS = S$, гдѣ S есть величина площади поверхности опоры, мы будемъ имѣть:

$$\begin{gathered}\Sigma p dS = p_0 \Sigma dS = p_0 S,\\ \Sigma p x dS = p_0 \Sigma x dS, \quad \Sigma p y dS = p_0 \Sigma y dS, \quad \Sigma p z dS = p_0 \Sigma z dS.\end{gathered} \tag{124}$$

Величины

$$\Sigma x dS, \quad \Sigma y dS, \quad \Sigma z dS$$

имѣютъ для данной площади опредѣленныя геометрическія значенія, не зависящія отъ того или другаго предположенія о распредѣленіи давленій. Именно, легко видѣть, что, для всякаго равномѣрнаго распредѣленія массъ по элементамъ данной поверхности, координаты a, b, c центра инерціи этихъ массъ опредѣляются какъ

$$a = \frac{\Sigma x dS}{\Sigma dS}, \quad b = \frac{\Sigma y dS}{\Sigma dS}, \quad c = \frac{\Sigma z dS}{\Sigma dS}, \tag{125}$$

при чемъ точка (a, b, c) очевидно опредѣляется вполнѣ формою и величиною данной площади, иноситъ названіе центра инерціи данной площади. На основаніи (125), уравненія (124) принимаютъ видъ

$$\Sigma p dS = p_0 S\,, \qquad (126)$$
$$\Sigma p x dS = p_0 S a\,, \quad \Sigma p y dS = p_0 S b\,, \quad \Sigma p z dS = p_0 S c\,.$$

Внося величины (126) въ урр. (122), мы получаемъ:

$$p_0 S = -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$p_0 S a = mN - nM - Ah\,,$$
$$p_0 S b = nL - lN - Bh\,, \qquad (127)$$
$$p_0 S c = lM - mL - Ch\,,$$

изъ которыхъ первое опредѣляетъ p_0, а три остальныя даютъ условіе, удовлетворяемое данными величинами $A, B, C, L, M, N, S, h, a, b, c$, для случая, когда предположеніе о равномѣрномъ распредѣленіи давленій можетъ имѣть мѣсто. Смыслъ этого условія наиболѣе очевиденъ изъ урр. (113), которыя даютъ намъ для даннаго случая:

$$x_0 = a\,, \quad y_0 = b\,, \quad z_0 = c\,, \qquad (128)$$

откуда заключаемъ, что равномѣрное распредѣленіе давленій только тогда возможно, когда равнодѣйствующая приложенныхъ силъ проходитъ черезъ центръ инерціи площади опоры. Для того, чтобы это условіе удовлетворялось, данная система силъ должна удовлетворять уравн. (127). Въ противномъ случаѣ равномѣрное распредѣленіе давленій не возможно, и мы должны дѣлать нашъ выборъ между различными перемѣнными распредѣленіями.

Для бо́льшей простоты послѣдующихъ разсужденій, мы выберемъ начало координатъ въ плоскости опоры, и ось z-овъ—перпендикулярно къ этой послѣдней. Тогда очевидно:

$$l = m = 0\,, \quad \text{и} \quad n = 1\,,$$

вслѣдствіе чего уравненія равновѣсія, (104) и (105), превращаются въ

$$A = 0\,, \quad B = 0\,, \quad C + \Sigma\lambda = 0\,, \qquad (129)$$
$$L - \Sigma\lambda y = 0\,, \quad M + \Sigma\lambda x = 0\,, \quad N = 0\,,$$

уравн. (113)—въ

$$y_0 = \frac{\Sigma p x dS}{\Sigma p dS}\,, \quad x_0 = \frac{\Sigma p y dS}{\Sigma p dS}\,, \quad z_0 = 0\,, \qquad (130)$$

а уравн. (122)—въ

$$\Sigma p dS = -C \,,$$
$$\Sigma p x dS = -M \,, \qquad \Sigma p y dS = L \qquad (131)$$
$$0 = h \,.$$

Въ случаѣ простѣйшаго, т. е. равномѣрнаго, распредѣленія давленій, мы будемъ имѣть изъ (131):

$$p_0 = -\frac{C}{S} \,, \qquad p_0 a = -\frac{M}{S} \,, \qquad p_0 b = \frac{L}{S} \,, \qquad (132)$$

что возможно, только когда удовлетворено условіе

$$-C = -\frac{M}{a} = \frac{L}{b} \qquad (133)$$

Въ противномъ случаѣ p должно быть перемѣннымъ, т. е. имѣть различныя величины для разныхъ элементовъ; другими словами, p должно зависѣть отъ положенія этихъ элементовъ; а такъ какъ положеніе безконечно малаго элемента площади опредѣляется координатами той точки, около которой этотъ элементъ расположенъ, то мы заключаемъ, что p должно зависѣть отъ координатъ точекъ плоскости опоры, т. е. представляться функціею этихъ послѣднихъ. Простѣйшая зависимость отъ координатъ x и y, которыми отличаются элементы плоскости опоры другъ отъ друга, можетъ быть предположена въ формѣ простой пропорціональности (линейной формѣ), и представлена въ видѣ:

$$p = p_0 + \alpha x + \beta y \,, \qquad (134)$$

гдѣ p_0, α, β суть нѣкоторыя постоянныя величины, независимыя отъ координатъ. Выраженіе (134) равносильно тому предположенію, что сила давленія для различныхъ точекъ убываетъ или прибываетъ пропорціонально ихъ разстояніямъ, въ ту или другую сторону отъ нѣкоторой прямой линіи. Дѣйствительно, полагая

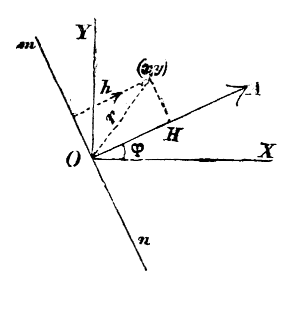


Рис. 73.

$$\alpha = k\cos\varphi \,, \qquad \beta = k\sin\varphi \,, \qquad (135)$$

гдѣ

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{и} \quad tg\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \,,$$

мы проведемъ черезъ начало координатъ (рис. 73) нѣкоторую прямую OA, подъ угломъ φ съ осью x-овъ, и изъ разсматриваемой точки (x, y) опустимъ перпендикуляръ на OA; тогда легко показать, что длина линіи OH, т. е.

разстояніе h точки (x, y) отъ прямой mn, проведенной черезъ начало координатъ и перпендикулярной къ OA, будетъ

$$h = x\cos\varphi + y\sin\varphi .$$

откуда

$$\alpha x + \beta y = kh \quad \text{и} \quad p = p_0 + kh , \tag{135}$$

гдѣ h для различныхъ точекъ различно, и представляетъ разстояніе соотвѣтствующей точки отъ извѣстной прямой, проведенной черезъ начало координатъ. Давленіе, распредѣленное по вышеприведенному закону, называется равномѣрно измѣняющимся, или сгибающимъ давленіемъ; при чемъ величина k, по отношенію къ давленію p, играетъ очевидно туже роль, какъ ускореніе—по отношенію къ скорости равномѣрно ускореннаго движенія. Линія mn носитъ названіе средней или нейтральной оси; на каждой изъ линій, параллельныхъ этой оси, величина силы давленія остается очевидно одна и таже. Величина силы давленія кромѣ того зависитъ только отъ направленія нейтральной оси, но не отъ ея разстоянія отъ начала координатъ. Дѣйствительно, будемъ считать разстоянія h' разныхъ точекъ отъ нѣкоторой другой линіи, параллельной mn и находящейся на разстояніи h_0 отъ этой послѣдней; тогда очевидно, $h' = h - h_0$ и

$$p = p_0 + k(h_0 + h') ,$$

или обозначая (136)

$$p_0' = p_0 + kh_0 ,$$

гдѣ p_0' есть очевидно постоянная величина, имѣемъ:

$$p = p_0' + kh'; \tag{137}$$

т. е. видимъ, что, съ перенесеніемъ оси mn параллельно самой себѣ въ разныя точки плоскости, измѣняется только величина постояннаго давленія p_0, съ которымъ сравниваются давленія въ остальныхъ точкахъ.

Равнодѣйствующая давленій на данную площадь опредѣлится, при равномѣрно измѣняющемся распредѣленіи, такъ:

$$\begin{aligned}\Sigma p dS &= p_0 \Sigma dS + \alpha \Sigma x dS + \beta \Sigma y dS \\ &= p_0 S + (\alpha a + \beta b) S ;\end{aligned} \tag{138}$$

но, обозначая черезъ h_0 разстояніе центра инерціи площади отъ нейтральной оси, и помня, что очевидно

$$\alpha a + \beta b = h_0 , \tag{139}$$

мы получимъ:

$$\Sigma p dS = S(p_0 + h_0)\,; \tag{140}$$

или, если будемъ считать разстоянія отъ оси, проходящей черезъ центръ инерціи и обозначимъ черезъ P_0 силу давленія на этой оси:

$$\Sigma p dS = P_0 S\,; \tag{141}$$

т. е. величина равнодѣйствующей давленій равна силѣ давленія въ центрѣ инерціи данной площади, умноженной на величину площади, или: сила давленія въ центрѣ инерціи площади есть средняя изъ силъ давленій на всѣхъ ея элементахъ.

Обращаясь далѣе къ моментамъ давленій, мы найдемъ, что суммы $\Sigma pxdS$ и $\Sigma pydS$, въ случаѣ равномѣрно измѣняющагося распредѣленія, представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma pxdS &= p_0 aS + \alpha\Sigma x^2 dS + \beta\Sigma xydS\,,\\ \Sigma pydS &= p_0 bS + \alpha\Sigma xydS + \beta\Sigma y^2 dS\,.\end{aligned}\right\} \tag{142}$$

Суммы

$$\Sigma x^2 dS\,,\quad \Sigma y^2 dS\,,\quad \Sigma xydS\,,$$

которыя мы будемъ обозначать соотвѣтственно черезъ

$$G\,,\quad H\,,\quad R\,,$$

зависятъ очевидно лишь отъ геометрической формы и размѣровъ данной площади. Изъ нихъ первыя двѣ суммы носятъ названіе моментовъ инерціи данной площади, соотвѣтственно около осей x-овъ и y-овъ. Для большей ясности послѣдующаго изложенія разсмотримъ здѣсь нѣкоторыя изъ главныхъ свойствъ моментовъ инерціи.

Съ измѣненіемъ положенія осей координатъ мѣняются очевидно и величины моментовъ инерціи около этихъ координатъ. Найдемъ законъ этого измѣненія. Представимъ себѣ двѣ системы осей координатъ OX, OY и OX', OY', проходящихъ черезъ одно и тоже начало; обозначимъ уголъ между осями OX и OX' черезъ ϑ; координаты какой либо точки A, относительно первыхъ осей, пусть будутъ x, y, а относительно вторыхъ, x', y'. Тогда легко видѣть, что *)

*) См. примѣчаніе къ форм. (152) ниже.

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta\,,$$
$$y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta\,, \tag{143}$$

вслѣдствіе чего находимъ, что

$$\Sigma x'^2 dS = \cos^2\vartheta\,\Sigma x^2 dS + \sin^2\vartheta\Sigma y^2 dS - 2\sin\vartheta\cos\vartheta\Sigma xy dS$$

и т. д. Или вообще, обозначая черезъ G', H', R' величины, въ которыя превратятся суммы G, H, R, взятыя по новымъ осямъ, мы находимъ:

$$\begin{aligned} G' &= G\cos^2\vartheta + H\sin^2\vartheta - 2R\cos\vartheta\sin\vartheta\,,\\ H' &= G\sin^2\vartheta + H\cos^2\vartheta + 2R\cos\vartheta\sin\vartheta\,,\\ R' &= (G - H)\cos\vartheta\sin\vartheta + R(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,, \end{aligned} \tag{144}$$

откуда замѣчаемъ, что

$$G' + H' = G + H\,, \tag{145}$$

т. е., что сумма моментовъ инерціи, относительно всякихъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей, остается одна и таже. Кромѣ того изъ тѣхъ-же выраженій (144) мы видимъ, что

$$G'H' - R'^2 = GH - R^2. \tag{146}$$

Съ измѣненіемъ величины угла ϑ величины G' и H' измѣняются; но такъ какъ ихъ сумма $G' + H'$ остается одна и таже, то, при наибольшей величинѣ G', величина H' дѣлается наименьшею, и на оборотъ. Кромѣ того ясно, что когда G' и H' достигаютъ соотвѣтственно своихъ наибольшаго и наименьшаго значеній, то для соотвѣтствующаго угла ϑ величина $G' - H'$ дѣлается наибольшею, а также и величина $(G' - H')^2$. Но такъ какъ

$$(G' - H')^2 = (G' + H')^2 - 4G'H'$$

и $(G' + H')^2$ постоянно, то $(G' - H')^2$ дѣлается наибольшимъ, когда $G'H'$ дѣлается наименьшемъ, или такъ какъ, по (146),

$$G'H' = GH - R^2 + R'^2,$$

то $G'H'$ дѣлается наименьшимъ, когда R'^2 дѣлается наименьшимъ. Но наименьшая возможная величина для R'^2 есть нуль, какъ это видно изъ (144), ибо R'^2 можетъ быть нулемъ. Слѣдовательно, при $R' = 0$, разность между G' и H' будетъ наибольшая изъ всѣхъ возможныхъ, и мы можемъ стало быть найти всегда пару такихъ осей, проходящихъ черезъ одно начало, для которыхъ величины G' и H'

будутъ соотвѣтственно наибольшею и наименьшею, или наоборотъ. Такіе моменты инерціи называются главными, а соотвѣтствующія оси—главными осями инерціи. Уголъ ϑ_1, опредѣляющій положеніе главныхъ осей инерціи относительно данныхъ OX и OY, находится изъ послѣдняго уравн. (144), въ которомъ должно положить $R' = 0$. Изъ этого уравненія мы имѣемъ:

$$\frac{\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_1}{\cos^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_1} = \frac{1}{2} tg 2\vartheta_1 = -\frac{R}{G-H}. \tag{147}$$

Самыя величины, главныхъ моментовъ инерціи G_1 и H_1, опредѣляются по даннымъ G, H, R изъ (145) и (146), которыя превращаются въ

$$G_1 + H_1 = G + R, \quad G_1 H_1 = GH - R^2, \tag{148}$$

и, будучи рѣшены относительно G_1 и H_1, даютъ:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2}(G+H) + \sqrt{\frac{1}{4}(G+H)^2 + R^2}, \\ H_1 &= \frac{1}{2}(G+H) - \sqrt{\frac{1}{4}(G+H)^2 + R^2}. \end{aligned} \tag{149}$$

Наоборотъ, если величина главныхъ моментовъ инерціи и положеніе главныхъ осей извѣстны, то величины G, H, R для любой пары взаимно перпендикулярныхъ осей, образующихъ уголъ ϑ съ главными осями инерціи, опредѣляется по (144) такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} G &= G_1 \cos^2\vartheta + H_1 \sin^2\vartheta, \\ H &= G_1 \sin^2\vartheta + H_1 \cos^2\vartheta, \\ R &= (G_1 - H_1)\cos\vartheta \sin\vartheta. \end{aligned} \tag{150}$$

Предположимъ теперь, что мы имѣетъ двѣ системы осей, параллельныхъ другъ другу, но проходящихъ черезъ разныя начала O и O''. Координаты одной и той-же точки, относительно той и другой системы осей, обозначимъ соотвѣтственно черезъ x, y и x'', y'', а также и моменты инерціи—черезъ G, H, R и G'', H'', R''. Тогда очевидно:

$$x'' = x + x_0, \quad y'' = y + y_0,$$

гдѣ x_0 и y_0 суть координаты точки O относительно начала O''. Легко затѣмъ видѣть, что

$$\Sigma x''^2 dS = \Sigma x^2 dS + 2x_0 \Sigma x dS + x_0^2 S$$

и т. д.; или, называя черезъ a и b координаты центра инерціи площади S относительно начала O:

$$G'' = G + x_0{}^2 S + 2x_0 a S\,,$$
$$H'' = H + y_0{}^2 S + 2y_0 b S\,, \quad (151)$$
$$R'' = R + x_0 y_0 S + (x_0 a + y_0 b)\, S\,.$$

Если O совпадаетъ съ центрами инерціи, то $a = b = 0$, и

$$G'' = G + x_0{}^2 S\,,$$
$$H' = H + y_0{}^2 S\,, \quad (152)$$
$$R'' = R + x_0 y_0 S\,,$$

откуда видимъ, что моменты инерціи, G и H, около осей, проходящихъ черезъ центръ инерціи, будутъ всегда меньше соотвѣтствующихъ моментовъ около осей параллельныхъ первымъ, но проходящихъ черезъ другое начало.

Предположимъ теперь, что данная плоскость не совпадаетъ ни съ одною изъ плоскостей координатъ, и опредѣлимъ для этой плоскости величины суммъ

$$\Sigma x^2 dS\,,\quad \Sigma y^2 dS\,,\quad \Sigma z^2 dS\,,\quad \Sigma yz dS\,,\quad \Sigma zx dS\,,\quad \Sigma xy dS\,,$$

которыя назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$G\,,\quad H\,,\quad J\,,\quad P\,,\quad Q\,,\quad R\,,$$

зная величины G' H' R' относительно прежнихъ осей координатъ, совпадавшихъ съ плоскостію. Если мы имѣемъ координаты x, y, z и x', y', z' одной и той-же точки относительно двухъ различныхъ системъ осей координатъ, проходящихъ черезъ одно и тоже начало, то вообще *)

$$x = x' \cos(x',x) + y' \cos(y',x) + z' \cos(z',x)\,,$$
$$y = x' \cos(x',y) + y' \cos(y',y) + z' \cos(z',y)\,, \quad (152)$$
$$z = x' \cos(x',z) + y' \cos(y',z) + z' \cos(z',)z\,.$$

*) Дѣйствительно, одно и тоже разстояніе данной точки отъ начала есть геометрическая сумма ея координатъ по той или другой системѣ. Слѣдовательно, двѣ геометрическія суммы, $x \dotplus y \dotplus z$ и $x' \dotplus y' \dotplus z'$, равны между собою. Если такъ, то и проложенія обѣихъ суммъ на всякую линію равны другъ другу. Пролагая теперь эти суммы на линіи x, y, z, и помня, что $\cos(x,y) = \cos(y,z) = \cos(x,z) = 0$, мы получимъ непосредственно выраженія (152), и въ частномъ случаѣ—выраженія (143).

Въ нашемъ случаѣ мы имѣемъ $z' = 0$; слѣдовательно:

$$\begin{aligned} x &= u_1 x' + u_2 y' , \\ y &= v_1 x' + v_2 y' , \\ z &= w_1 x' + w_2 y' , \end{aligned} \tag{153}$$

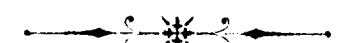
гдѣ значенія $u_1 \ldots w_1 \ldots v_1 \ldots$ по сравненію съ (152) очевидно. Если начала обѣихъ системъ координатъ не совпадаютъ, то, обозначая черезъ x_0, y_0, z_0 координаты стараго начала по новымъ осямъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} x &= u_1 x' + u_2 y' + x_0 , \\ y &= v_1 x' + v_2 y' + y_0 , \\ z &= w_1 x' + w_2 y' + z_0 . \end{aligned} \tag{154}$$

На основаніи этихъ соотношеній легко найдемъ, что

$$\begin{aligned} G &= u_1^2 G' + u_2 H' + 2u_1 u_2 R' + x_0^2 S + (u_1 a' + u_2 b') S x_0 , \\ H &= v_1^2 G' + v_2^2 H' + 2v_1 v_2 R' + y_0^2 S + (v_1 a' + v_2 b') S y_0 , \\ J &= w_1^2 G' + w_2^2 H' + 2w_1 w_2 R' + z_0^2 S + (w_1 a' + w_2 b') S z_0 , \\ P &= w_1 v_1 G' + w_2 v_2 H' + (w_1 v_2 + w_2 v_1) R' + z_0 y_0 S \\ &\quad + [z_0 (v_1 a' + v_2 b') + y_0 (w_1 a' + w_2 b')] S \\ Q &= u_1 w_1 G' + u_2 w_2 H' + (u_1 w_2 + u_2 w_1) R' + x_0 z_0 S \\ &\quad + [x_0 (w_1 a' + w_2 b') + z_0 (u_1 a' + u_2 b')] S , \\ R &= v_1 u_1 G' + v_2 u_2 H' + (v_1 u_2 + v_2 u_1) R' + y_0 x_0 S \\ &\quad + [y_0 (u_1 a' + u_2 b') + x_0 (v_1 a' + v_2 b')] . \end{aligned} \tag{155}$$

Предыдущія выраженія значительно упрощаются, когда старыя координаты отнесены къ центру инерціи данной площади, какъ началу, и къ главнымъ осямъ инерціи, ибо тогда очевидно, $R' = a' = b' = 0$, гдѣ a' и b' суть, какъ и въ (155), координаты центра инерціи по старой системѣ.



Возвращаясь теперь къ распредѣленію давленій по площади опоры, мы видимъ, что, при равномѣрно измѣняющемся распредѣленіи, величины силъ давленій будутъ извѣстны, если мы опредѣлимъ три постоянныя величины p_0, α, β. Подставляя величины $\Sigma p dS$, $\Sigma p x dS$, $\Sigma p y dS$ изъ выраженій (138) и (142) въ уравненія (131), мы

находимъ:

$$\begin{aligned}(p_0 + \alpha a + \beta b) S &= -C\,,\\ p_0 a S + \alpha G + \beta R &= -M\,,\\ p_0 b S + \alpha R + \beta H &= L\,,\end{aligned} \tag{156}$$

откуда получаемъ:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{L(R-abS)+M(H-b^2S)-C(aH-bR)}{(R-abS)^2-(G-a^2S)(H-b^2S)}\,,\\ \beta &= -\frac{M(R-abS)+L(G-a^2S)+C(bG-aR)}{(R-abS)^2-(G-a^2S)(H-b^2S)}\,,\\ p_0 &= -\frac{C}{S}+\frac{L(bG-aR)+M(bR-aH)+C(b^2G+a^2H-2abR)}{(R-abS)^2-(G-a^2S)(H-b^2S)}\,.\end{aligned} \tag{157}$$

Если начало координатъ выбрано въ центрѣ инерціи данной площади и координаты параллельны главнымъ осямъ инерціи, то $a = b = R = 0$, и

$$p_0 = -\frac{C}{S}\,, \quad \alpha = -\frac{M}{G}\,, \quad \beta = \frac{L}{H}\,. \tag{158}$$

Если плоскость опоры не совпадаетъ ни съ одною изъ плоскостей координатъ, то мы должны положить:

$$p = p_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z\,. \tag{158)a}$$

Затѣмъ полагая

$$\begin{aligned}&\Sigma x dS = S x_0\,, \quad \Sigma y dS = S y_0\,, \quad \Sigma z dS = S z_0\,,\\ &\Sigma x^2 dS = G\,, \quad \Sigma y^2 dS = H\,, \quad \Sigma z^2 dS = J\,,\\ &\Sigma yz dS = P\,, \quad \Sigma zx dS = Q\,, \quad \Sigma xy dS = R\,,\end{aligned} \tag{158)b}$$

мы найдемъ, что должно быть:

$$\begin{aligned}\Sigma p dS &= [p_0 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0] S\,,\\ \Sigma p x dS &= p_0 x_0 S + \alpha G + \beta R + \gamma Q\,,\\ \Sigma p y dS &= p_0 y_0 S + \alpha R + \beta H + \gamma P\,,\\ \Sigma p z dS &= p_0 z_0 S + \alpha Q + \beta P + \gamma J\,.\end{aligned} \tag{158)c}$$

Вставляя эти величины въ уравненія равновѣсія (122), мы опредѣлимъ коеффиціенты $p_0, \alpha, \beta, \gamma$, при чемъ однако величины α, β, γ, не остаются независимыми другъ отъ друга, но, на основаніи (116), связаны уравненіемъ:

$$l \Sigma p x dS + m \Sigma p y dS + n \Sigma p z dS = h \Sigma p dS\,,$$

которое, вслѣдствіе $(158)_c$, превращается въ

$$\begin{aligned}&\alpha(lG+mR+nQ)\\&+\beta(lR+mH+nP)\\&+\gamma(lQ+mP+nJ)=hS(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)\,.\end{aligned}\tag{158)d}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для любой системы взаимно уравновѣшивающихся силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, подпертому данною площадью, мы можемъ найти соотвѣтствующее равномѣрно измѣняющееся распредѣленіе силъ давленій опоры на элементы опирающейся поверхности. Эти распредѣленія, для различныхъ системъ данныхъ силъ, будутъ разниться между собою величинами p_0, α, β. Если найдено давленіе p опоры на тѣло, то наоборотъ, давленіе тѣла на опору будетъ—p, и распредѣлится очевидно точно такимъ-же образомъ, какъ p.

Если твердое тѣло опирается нѣсколькими плоскостями на различныя опоры, то уравненія равновѣсія будутъ имѣть видъ:

$$\begin{aligned}&A+l\Sigma\lambda+l'\Sigma\lambda'+l''\Sigma\lambda''\ \ldots=0\,,\\&B+m\Sigma\lambda+m'\Sigma\lambda'+m''\Sigma\lambda''+\ldots=0\,,\\&C+n\Sigma\lambda+n'\Sigma\lambda'+m''\Sigma\lambda''+\ldots=0\,,\\&L+m\Sigma\lambda z-n\Sigma\lambda y+m'\Sigma\lambda'z'-n'\Sigma\lambda'y'+\ldots=0\,,\\&M+n\Sigma\lambda x-l\Sigma\lambda z+n'\Sigma\lambda'x'-l'\Sigma\lambda'z'+\ldots=0\,,\\&N+l\Sigma\lambda y-m\Sigma\lambda x+l'\Sigma\lambda'y'-m'\Sigma\lambda'x'+\ldots=0\,,\end{aligned}\tag{159}$$

гдѣ число членовъ, содержащихъ множители λ, $\lambda'\ldots$, и относящихся къ различнымъ плоскостямъ опоры, вообще болѣе, нежели число уравненій. Кромѣ того члены, содержащіе множители λ, $\lambda'\ldots$, связаны между собою уравненіями (116):

$$\begin{aligned}&l\Sigma\lambda x+m\Sigma\lambda y+n\Sigma\lambda z=h\Sigma\lambda\,,\\&l'\Sigma\lambda'x'+m'\Sigma\lambda'y'+n'\Sigma\lambda'z'=h'\Sigma\lambda'\,,\end{aligned}\quad \text{и т. д.}\tag{160}$$

которыхъ будетъ столько, сколько дано различныхъ плоскостей опоры. Такимъ образомъ, если число плоскостей опоры будетъ N, то число различныхъ суммъ, содержащихъ множители λ, λ' и т. д., будетъ $4N$, а число уравненій (159) и (160) будетъ $N+6$. Если изъ этихъ уравненій возможно составить одно или нѣсколько, не содержащихъ

величинъ λ, то такія уравненія и представятъ условія равновѣсія приложенной системы силъ. Въ противномъ случаѣ, равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто при всякихъ силахъ, если только всѣ λ будутъ соотвѣтственно отрицательныя или нули. Такъ, для двухъ различныхъ плоскостей опоры условіе равновѣсія получится выключеніемъ $\Sigma\lambda$ и $\Sigma\lambda'$ изъ первыхъ трехъ уравн. (159), и представится въ видѣ:

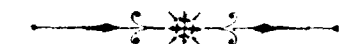
$$A(mn'-m'n)+B(nl'-n'l)+C(lm'-l'm)=0\,, \qquad (161)$$

при чемъ

$$\Sigma\lambda=\frac{Bl'-Am'}{lm'-l'm}\overset{=}{<}0\,,\qquad \Sigma\lambda'=\frac{Am-Bl}{lm'-l'm}\overset{=}{<}0\,. \qquad (162)$$

Для трехъ поверхностей условія равновѣсія выразятся только неравенствами, и т. д.

Что касается до распредѣленія давленій по плоскостямъ опоры, то мы знаемъ, что для его полнаго опредѣленія нужно знать для каждой площади четыре величины: $\Sigma\lambda$, $\Sigma\lambda x$, $\Sigma\lambda y$, $\Sigma\lambda z$; но уже въ случаѣ двухъ плоскостей, для опредѣленія 8-ми неизвѣстныхъ, мы имѣемъ только 7 уравненій (т. е. урр. (159) и (160), за исключеніемъ уравненія равновѣсія (161)). Слѣдовательно, распредѣленіе остается не вполнѣ опредѣленнымъ.



Если тѣло не имѣетъ возможности перемѣщаться ни въ какую сторону, перпендикулярно къ плоскости опоры, то величины k^2, входящія въ условія перемѣщеній (80) и (81), должны быть равны нулю, вслѣдствіе чего условія (85), опредѣляющія знакъ у λ, т. е. направленіе силъ сопротивленія или давленія опоры на тѣло, не будутъ имѣть мѣста, и знакъ у каждаго изъ λ можетъ быть $+$ или $-$; т. е. давленіе опоры на тѣло можетъ быть направлено въ ту и другую сторону по нормали къ ея поверхности. Сила сопротивленія плоскости опоры, направленная отъ плоскости внутри объема, занимаемаго тѣломъ, называется *давленіемъ* по преимуществу. Сила сопротивленія плоскости опоры, направленная отъ плоскости наружу отъ объема, занимаемаго тѣломъ, называется *тягою* или *натяженіемъ*. Тяга есть очевидно отрицательное давленіе, и наоборотъ. Давленію или тягѣ опоры на твердое тѣло очевидно соотвѣтствуютъ равныя и противоположныя давленіе и тяга твердаго тѣла на опору. Величины давленія и тяги, отнесенныя въ данной точкѣ поверхности къ еди-

ницѣ площади, будутъ называться силами или напряженіями давленія или тяги (натяженія) въ соотвѣтствующей точкѣ. Какъ давленія, такъ и натяженія принадлежатъ къ такимъ силамъ, которыя мы представляемъ себѣ распредѣленными на каждый элементъ поверхности и которыя можно обозначить особымъ названіемъ усилій. Давленія и натяженія, дѣйствуя всегда въ ту или другую сторону по нормалямъ къ поверхности, могутъ быть обозначены, какъ нормальныя усилія *). Если нормальное усиліе распредѣлено по поверхности равномѣрнопеременно, то оно называется сгибающимъ усиліемъ, т. е. соотвѣтственно—сгибающимъ давленіемъ, или сгибающимъ натяженіемъ.

Для случая, когда твердое тѣло могло-бы не только давить на плоскость опоры, скользя по ней, но и тянуть ее, условія равновѣсія приложенныхъ силъ будутъ выражаться тѣми-же самыми уравненіями (104) и (105), при чемъ однако

$$\text{различныя } \lambda \gtreqless 0 . \tag{163}$$

Изъ этихъ уравненій мы видимъ, какъ прежде, что система данныхъ силъ должна имѣть одну равнодѣйствующую перпендикулярную къ плоскости, но направленную въ любую сторону по нормали. Точка приложенія равнодѣйствующей опредѣлится уравненіями (113), въ которыхъ лѣвыя части могутъ быть выражены черезъ данныя силы изъ (109) и (118). Но такъ какъ величины λ могутъ быть при этомъ и положительными, и отрицательными, то центръ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны, не будетъ необходимо лежать внутри площади образуемой точками приложенія этихъ силъ, какъ въ случаѣ, когда знаки у всѣхъ λ одинакіе. Распредѣленіе напряженій нормальныхъ усилій можетъ для всякихъ данныхъ силъ, и въ этомъ случаѣ, быть выражено формулой (134), гдѣ p для различныхъ точекъ можетъ быть отрицательнымъ и положительнымъ.

Наконецъ, если твердое тѣло неизмѣннымъ образомъ скрѣплено съ данною плоскостію какою нибудь частію своей поверхности, или тремя точками, то оно остается всегда неподвижнымъ, и всякая система приложенныхъ къ нему силъ будетъ оставаться въ равновѣсіи. Въ такихъ случаяхъ можно разсматривать данное тѣло, какъ совершенно свободное,

*) Обозначеніе распредѣленныхъ по элементамъ поверхностей силъ особымъ терминомъ (*stress*) было введено въ первый разъ Rankine'омъ.

къ которому съ одной стороны приложена данная система силъ, а съ другой—уравновѣшивающія ее силы сопротивленія плоскости. Эти послѣднія въ свою очередь очевидно могутъ быть разбиты на двѣ системы силъ: однѣ перпендикулярныя къ плоскости, т. е.—нормальныя давленія или натяженія, и другія, параллельныя плоскости. Силы сопротивленія, параллельныя плоскости скрѣпленія, могутъ быть представлены распредѣленными на каждый элементъ поверхности, и явятся такимъ образомъ усиліями, которыя, въ отличіе отъ нормальныхъ, носятъ названіе касательныхъ или тангенціальныхъ. Тангенціальныя усилія могутъ быть представлены всѣ параллельными другъ другу и направленными въ одну или разныя стороны, при чемъ распредѣленіе ихъ напряженій по различнымъ элементамъ, для ихъ опредѣленнаго направленія и для данной системы приложенныхъ силъ, можетъ быть выражено тою-же формулою (134). Система тангенціальныхъ усилій, распредѣленныхъ по поверхности равномѣрно перемѣннымъ образомъ, носитъ названіе закручивающаго усилія.

Разысканіе величины закручивающаго усилія для данной плоскости закрѣпленія приводится очевидно къ разысканію тѣхъ слагающихъ уравновѣшивающихъ силъ, приложенныхъ къ плоскости, которыя параллельны этой плоскости и которыхъ моменты слѣдовательно къ ней перпендикулярны. Если оси координатъ мы выберемъ такъ, чтобы плоскость (xy) совпадала съ плоскостію закрѣпленія, черезъ $\pm q$ назовемъ напряженіе тангенціальнаго усилія, приложеннаго къ элементу dS площади закрѣпленія, черезъ ψ—уголъ направленія равнодѣйствующей всѣхъ q съ осью x-овъ, то величина q для разныхъ элементовъ, на основаніи вышесказаннаго, опредѣляется изъ уравненій:

$$\begin{gathered}\cos\psi\,\Sigma q dS + A = 0\,, \qquad \sin\psi\,\Sigma q dS + B = 0\,, \\ \cos\psi\,\Sigma q y dS - \sin\psi\,\Sigma q x dS + N = 0\,.\end{gathered} \tag{164}$$

Выражая затѣмъ законъ предполагаемаго равномѣрно измѣняющагося распредѣленія усилій формулой

$$q = q_0 + \varkappa x + \sigma y\,, \tag{165}$$

гдѣ $q_0, \varkappa, \sigma$ суть нѣкоторыя постоянныя величины, и предполагая, что начало координатъ выбрано въ центрѣ инерціи площади, а оси x-овъ и y-овъ направлены по ея главнымъ осямъ инерціи, мы находимъ изъ (164) и (165):

$$Sq_0 \cos\psi + A = 0\,, \qquad Sq_0 \sin\psi + B = 0\,,$$
$$\sigma H \cos\psi - \varkappa G \sin\psi + N = 0, \tag{166}$$

гдѣ

$$\Sigma y dS = \Sigma x dS = \Sigma xy dS = 0\,, \qquad \Sigma x^2 dS = G\,,\ \Sigma y^2 dS = H.$$

Первыя два изъ урр. (166) опредѣляютъ q_0 и ψ:

$$q_0 = -\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{S}\,, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{B}{A}\,; \tag{167}$$

а третье, которое, на основаніи (167), превратится въ

$$-\sigma AH + \varkappa BG - N\sqrt{A^2+B^2} = 0\,, \tag{168}$$

опредѣляетъ σ и $\varkappa$, одно изъ которыхъ стало-быть остается произвольнымъ. Такъ какъ, на основаніи разъясненій по поводу выраженій (135), мы знаемъ, что $\varkappa$ и σ могутъ быть вообще представлены въ видѣ

$$\varkappa = k\cos\varphi\,, \qquad \sigma = k\sin\varphi\,, \tag{169}$$

гдѣ φ есть уголъ съ осью x-овъ нѣкоторой прямой, пропорціонально разстояніямъ отъ которой прирастаетъ или убываетъ величина q, а k—коеффиціентъ этой пропорціональности, то вслѣдствіе произвольности одной изъ величинъ, $\varkappa$ и σ, направленіе упомянутой прямой тоже становится произвольнымъ. Для простоты мы можемъ выбрать это направленіе такъ, чтобы было $\varphi = \psi$, т. е. чтобы величина напряженій усилій, вдоль по линіи параллельной ихъ направленію, оставалась одна и таже. Въ такомъ случаѣ:

$$\varkappa = k\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,, \qquad \sigma = k\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,, \tag{170}$$

и ур. (168) превращается въ

$$kAB(G-H) - N(A^2+B^2) = 0\,, \tag{171}$$

откуда:

$$k = \frac{N(A^2+B^2)}{AB(G-H)}\,, \qquad \varkappa = \frac{N\sqrt{A^2+B^2}}{B(G-H)}\,,$$
$$\sigma = \frac{N\sqrt{A^2+B^2}}{A(G-H)}\,. \tag{172}$$

§ 44. Усилія различныхъ частей твердаго тѣла относисельно другъ друга.

Если нѣкоторая система силъ, приложенныхъ къ данному твердому тѣлу, удовлетворяетъ условіямъ равновѣсія, то каждая отдѣльно взятая сила этой системы или нѣсколько силъ могутъ быть разсматриваемы, какъ уравновѣшивающія остальныхъ силъ. Вообще система силъ, приложенныхъ къ точкамъ одной части тѣла при упомянутыхъ условіяхъ представляется уравновѣшивающей систему силъ, приложенныхъ къ остальнымъ частямъ того-же тѣла. Поэтому мы можемъ сказать, что одна часть тѣла (или вообще какой либо системы матеріальныхъ точекъ), вслѣдствіе приложенныхъ къ ней внѣшнихъ силъ, дѣйствуетъ на другія части того-же тѣла, и на оборотъ. Внутри даннаго тѣла проведемъ мысленно нѣкоторую поверхность, раздѣляющую его на какія-либо двѣ части; тогда эта поверхность можетъ быть разсматриваема, какъ нѣкоторая поверхность опоры, черезъ посредство которой обѣ упомянутыя части дѣйствуютъ другъ на друга, вслѣдствіе приложенныхъ къ этимъ частямъ внѣшнихъ силъ. Каждая изъ двухъ частей тѣла производитъ на поверхность нѣкоторыя давленія, которыя могутъ быть представлены въ видѣ нормальныхъ и тангенціальныхъ усилій, распредѣленныхъ по всѣмъ элементамъ поверхности. Если-бы поверхность, будучи скрѣплена съ тѣломъ, была неподвижна, то упомянутыя усилія уравновѣшивались-бы сопротивленіемъ поверхности. Въ разсматриваемомъ же случаѣ роль сопротивленій играютъ усилія, которыя прикладываются къ той-же поверхности съ другой ея стороны, и обусловливаются силами, приложенными къ другой части твердаго тѣла. Такъ какъ поверхность раздѣла можетъ быть выбрана нами совершенно произвольно, то мы приходимъ къ тому представленію, что силы, приложенныя къ разнымъ точкамъ твердаго тѣла, могутъ быть разсматриваемы какъ усилія, дѣйствующія на всякій элементъ поверхности, проводимый гдѣ либо внутри даннаго тѣла. Не должно при этомъ однако забывать, что распредѣленіе усилій по элементамъ данной поверхности раздѣла и ихъ величина остаются произвольными при данной системѣ силъ; это явствуетъ уже изъ того, что точка приложенія каждой отдѣльной силы можетъ быть выбрана гдѣ угодно на линіи дѣйствія этой послѣдней, и такимъ образомъ, одна и таже си-

ла можетъ быть разсматриваема, какъ дѣйствующая на ту или другую изъ частей твердаго тѣла, раздѣленныхъ упомянутою поверхностію. Еще большій просторъ для произвольнаго выбора распредѣленій усилій является въ томъ случаѣ, когда отдѣльныя силы системы не даны, а система силъ опредѣлена, какъ это всегда бываетъ въ вопросахъ динамики твердаго тѣла, только слагающими A, B, C геометрической суммы силъ и слагающими L, M, N ихъ моментовъ около даннаго начала.

Если мы представимъ себѣ силы, дѣйствующія на твердое тѣло, распредѣленными въ видѣ усилій по элементамъ различныхъ поверхностей, раздѣляющихъ данное тѣло на отдѣльныя, дѣйствующія другъ на друга части, то каждая изъ такихъ частей, находясь подъ дѣйствіемъ остальныхъ, должна сохранять равновѣсіе, если все тѣло находится тоже въ равновѣсіи. Выдѣливши какую-нибудь произвольную часть даннаго твердаго тѣла, мы найдемъ очевидно, что силы къ ней приложенныя будутъ представлены во первыхъ усиліями, распредѣленными по пограничной поверхности выдѣленной части и обусловленными дѣйствіями на эту часть остальнаго тѣла, вслѣдствіе приложенныхъ къ нему силъ, во вторыхъ—силами, приложенными непосредственно къ точкамъ выдѣленнаго объема. Силы того и другаго рода вмѣстѣ должны удовлетворять условіямъ равновѣсія твердаго тѣла.

Выдѣленную часть твердаго тѣла представимъ себѣ въ видѣ безконечно малаго тетраедра, три пограничныя плоскости OBC, OCA, OAB (рис. 74), котораго параллельны тремъ произвольно выбраннымъ плоскостямъ прямоугольныхъ координатъ, а четвертая пограничная плоскость ABC образуетъ съ первыми тремя произвольные углы. Предположимъ сперва, что упомянутый тетраедръ находится только подъ дѣйствіемъ усилій распредѣленныхъ по его поверхности, и найдемъ условіе равновѣсія этихъ усилій. Прежде всего обратимся къ условіямъ:

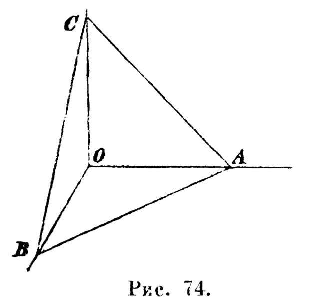


Рис. 74.

$$\Sigma X = 0\,, \quad \Sigma Y = 0\,, \quad \Sigma Z = 0. \qquad (173)$$

Такъ какъ стороны тетраедра безконечно малы, то мы можемъ предположить, что по каждой изъ нихъ усилія распредѣлены равномѣрно, т. е. къ каждой части одной и той-же стороны приложены однѣ и

тѣже силы. Величины трехъ слагающихъ по осямъ координатъ усилій, дѣйствующихъ на сторону перпендикулярную къ оси x-овъ (т. е. на сторону OBC) и отнесенныхъ къ единицѣ площади, назовемъ черезъ X_x, Y_x, Z_x; величину площади OBC обозначимъ черезъ S_x. Тогда суммы слагающихъ по тремъ осямъ для стороны S_x выразятся черезъ .

$$X_x S_x, \quad Y_x S_x, \quad Z_x S_x. \tag{174}$$

Подобныя-же суммы для двухъ сторонъ S_y и S_z будутъ:

$$\begin{aligned} &X_y S_y, \quad Y_y S_y, \quad Z_y S_y, \\ &X_z S_z, \quad Y_z S_z, \quad Z_z S_z. \end{aligned} \tag{174}$$

Такія-же величины для четвертой стороны, площадь которой обозначимъ черезъ S_n, пусть будутъ:

$$X_n S_n, \quad Y_n S_n, \quad Z_n S_n. \tag{174}$$

Такимъ образомъ, на основаніи выше приведенныхъ обозначеній, первое изъ условій равновѣсія (173) обратится въ

$$X_x S_x + X_y S_y + X_n S_z + X_n S_n = 0. \tag{175}$$

Но такъ какъ площади S_x, S_y, S_z суть проложенія стороны S_n, то обозначая черезъ α, β, γ косинусы угловъ, которые перпендикуляръ (n) къ плоскости S_n, направленный внутрь объема тетраедра, дѣлаетъ съ осями координатъ, т. е. съ перпендикулярами къ тремъ другимъ сторонамъ, мы очевидно будемъ имѣть:

$$S_x = -S_n\alpha, \quad S_y = -S_n\beta, \quad S_z = -S_n\gamma, \tag{176}$$

при чемъ знакъ— принятъ потому, что величины площадей S_x, S_y, S_z должны получиться изъ (176) положительными, а величины α, β, γ, какъ косинусы тупыхъ угловъ, являются отрицательными. На основаніи (176), уравненіе (175), а также и два другихъ изъ уравненій (175), представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z, \\ Y_n &= \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z, \\ Z_n &= \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z. \end{aligned} \tag{177}$$

Значеніе этихъ уравненій состоитъ въ слѣдующемъ. Черезъ любую точку O внутри даннаго тѣла мы можемъ представить себѣ проведенными нѣкоторыя три взаимно перпендикулярныя плоскости, и можемъ также опредѣлить девять слагающихъ усилій, приложенныхъ къ частямъ упомянутыхъ плоскостей, лежащимъ безконечно близко

отъ точки O. Зная эти девять величинъ, мы можемъ, на основаніи (177), вычислить слагающія X_n, Y_n, Z_n усилій, приложенныхъ къ любой плоскости, проведенной безконечно близко отъ точки O, для тѣхъ ея частей, которыя безконечно мало удалены отъ той-же точки. Такимъ образомъ, для рѣшенія вопроса объ усиліяхъ, приложенныхъ къ элементу данной поверхности, проходящему какъ-либо черезъ данную точку внутри твердаго тѣла, достаточно рѣшить туже задачу для трехъ взаимно перпендикулярныхъ элементовъ поверхности, проходящихъ черезъ туже точку, и знать углы, которые перпендикуляръ къ данному элементу дѣлаетъ съ ребрами треграннаго угла, образуемаго тремя выше упомянутыми взаимно перпендикулярными плоскостями.

Теперь приложимъ къ тому-же тетраедру остальныя три извѣстныя уравненія равновѣсія:

$$\Sigma(Yz - Zy) = 0\,, \quad \Sigma(Zx - Xz) = 0\,, \quad \Sigma(Xy - Yx) = 0\,, \qquad (178)$$

при чемъ для простоты предположимъ начало координатъ въ вершинѣ O тетраедра. Такъ какъ къ точкамъ каждой изъ сторонъ тетраедра приложены по условію различныя системы параллельныхъ и равныхъ силъ, то каждую изъ такихъ системъ мы можемъ замѣнить одною силою, равною алгебраической суммѣ силъ системы и приложенною къ центру инерціи соотвѣтствующей стороны. Центръ инерціи всякаго треугольника лежитъ, какъ легко видѣть, въ точкѣ пересѣченія двухъ линій, проходящихъ соотвѣтственно черезъ двѣ его вершины и дѣлящихъ по поламъ обѣ противулежащія угламъ стороны, при чемъ каждыя двѣ такія линіи пересѣкаются взаимно на двухъ третяхъ ихъ длины, считая отъ вершины соотвѣтствующихъ угловъ. Такимъ образомъ, обозначая длины OA, OB, OC реберъ тетраедра черезъ a, b, c, мы легко найдемъ, что координаты центра инерціи будутъ:

для стороны S_x : $0\,,\quad \frac{2}{3}b\,,\quad \frac{2}{3}c\,,$

» » S_y : $\frac{2}{3}a\,,\quad 0\,,\quad \frac{2}{3}c\,,$

» » S_z : $\frac{2}{3}a\,,\quad \frac{2}{3}b\,,\quad 0\,,$

» » S_n : $\frac{2}{3}a\,,\quad \frac{2}{3}b\,,\quad \frac{2}{3}c\,,$

вслѣдствіе чего первое изъ урр. (178) мы можемъ написать въ видѣ:

$$\begin{gathered} Y_x S_x \frac{2}{3} c + Y_y S_y \frac{2}{3} c + Y_n S_n \frac{2}{3} c \\ - \left[Z_x S_x \frac{2}{3} b + Z_z S_z \frac{2}{3} b + Z_n S_n \frac{2}{3} c \right] = 0 , \end{gathered} \tag{179}$$

или, на основаніи (176) и (177), замѣняя величины S_x, S_y, S_z, Y_n и Z_n:

$$\begin{gathered} (-\alpha Y_x - \beta Y_y + \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z) \frac{2}{3} c \\ - (-\alpha Z_x - \gamma Z_z + \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z) \frac{2}{3} b = 0 , \end{gathered}$$

откуда, замѣчая что величины γc и βb выражаютъ одну и туже длину перпендикуляра изъ точки O на плоскость ABC, мы находимъ условіе:

$$Y_z = Z_y . \tag{180}$$

Точно также найдемъ изъ остальныхъ двухъ урр. (178):

$$Z_x = X_z , \qquad X_y = Y_x , \tag{180}$$

откуда заключаемъ, что для каждыхъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскихъ элементовъ касательное усиліе одного, направленное параллельно плоскости втораго, равно касательному усилію другаго, направленному параллельно плоскости перваго.

Вводя обозначенія:

$$\begin{gathered} T_1 = Y_z = Z_y , \qquad T_2 = Z_x = X_z , \qquad T_3 = X_y = Y_x , \\ N_1 = X_x , \qquad N_2 = Y_y , \qquad N_3 = Z_z , \end{gathered} \tag{181}$$

мы представимъ уравненія (177) въ видѣ:

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2 , \\ Y_n &= \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1 , \\ Z_n &= \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3 , \end{aligned} \tag{182}$$

откуда видимъ, что для рѣшенія вопроса о нахожденіи трехъ слагающихъ усилій на какой либо элементъ поверхности, проходящій черезъ данную точку, необходимо знать, кромѣ положенія элемента, только шесть различныхъ усилій на три взаимно перпендикулярныя элемента, проходящіе черезъ туже точку; именно: три нормальныя усилія N_1, N_2, N_3 и три тангенціальныя T_1, T_2, T_3, изъ которыхъ T_1, будучи приложено къ элементамъ, перпендикулярнымъ къ

осямъ y-овъ или z-овъ, направляется параллельно соотвѣтственно осямъ z-овъ или y-овъ, и т. п.

Если на разсматриваемый тетраедръ будутъ еще дѣйствовать силы, приложенныя къ точкамъ, внутри его объема, то обозначая черезъ ΣX, ΣY, ΣZ суммы слагающихъ этихъ силъ по осямъ координатъ, мы должны будемъ измѣнить условіе равновѣсія (175) и ему подобныя слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} &X_x S_x + X_y S_y + X_z S_z + X_n S_n + \Sigma X = 0\,, \\ &Y_x S_x + Y_y S_y + Y_z S_z + Y_n S_n + \Sigma Y = 0\,, \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{182}$$

Но такъ какъ площади четырехъ сторонъ тетраедра безконечно малы, то первые четыре члена въ каждомъ изъ уравн. (182) будутъ безконечно малы въ сравненіи съ ΣX, ΣY и ΣZ, вслѣдствіе чего и могутъ передъ этими послѣдними быть пренебрегаемы. Поэтому урр. (182) превращаются въ

$$\Sigma X = 0\,, \quad \Sigma Y = 0\,, \quad \Sigma Z = 0. \tag{183}$$

Внося эти условія въ (182), мы приходимъ также и къ прежде выведеннымъ уравненіямъ (177), которыя для даннаго случая будутъ обусловливать равновѣсіе, вмѣстѣ съ урр. (183). Точно также далѣе, обозначая черезъ различныя x, y, z точки приложенія данныхъ силъ, мы легко замѣтимъ, что всѣ члены уравненія (179) и ему подобныхъ, къ которымъ нужно въ данномъ случаѣ придать $\Sigma(Yz - Zy)$ и т. п., будутъ безконечно менѣе придаваемыхъ моментовъ, и вслѣдствіе этого могутъ быть, въ сравненіи съ этими послѣдними, пренебрегаемы. Поэтому мы получаемъ еще такія уравненія равновѣсія:

$$\sum(Yz - Zy) = 0\,, \quad \sum(Zx - Xz) = 0\,, \quad \sum(Xy - Yx) = 0\,, \tag{184}$$

вмѣстѣ съ которыми также будутъ имѣть мѣсто и урр. (180), выведенныя изъ (179).

Итакъ, мы приходимъ къ тому заключенію, что соотношенія (182) существуютъ во всякомъ случаѣ; если-же существуютъ кромѣ данныхъ усилій X_n, Y_n, Z_n, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, еще другія силы, приложенныя къ точкамъ безконечно малаго объема выдѣленной части тѣла, то эти силы должны взаимно уравновѣшиваться независимо отъ упомянутыхъ усилій.

Примѣчаніе. Три слагающія усилія X_n, Y_n, Z_n, отнесенныя къ единицѣ площади даннаго элемента поверхности и выражаемыя съ помощію шести усилій N и T, дѣствующихъ на три опредѣленныя поверхности, даютъ величину P и направленіе результирующаго давленія на упомянутый элементъ такимъ образомъ:

$$P^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2$$

$$\cos(P,x) = \frac{X_n}{P}, \quad \cos(P,y) = \frac{Y_n}{P}, \quad \cos(P_n,z) = \frac{Z_n}{P}. \qquad (185)$$

Вообще направленіе P не совпадаетъ съ перпендикуляромъ къ разсматриваемому элементу; но возможно очевидно подыскать такой элементъ поверхности, проходящій черезъ туже точку, какъ разсматриваемый, давленіе на который будетъ къ нему перпендикулярно. Для такого элемента очевидно мы будемъ имѣть:

$$\cos(P,x) = \alpha, \quad \cos(P,y) = \beta, \quad \cos(P,z) = \gamma,$$

гдѣ α, β, γ суть косинусы угловъ нормали къ элементу съ осями координатъ, и слѣдовательно получимъ:

$$X_n = P\alpha, \quad Y_n = P\beta, \quad Z_n = P\beta,$$

а вслѣдствіе (182):

$$\begin{aligned} P\alpha &= \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2, \\ P\beta &= \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1, \\ P\gamma &= \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3, \end{aligned} \qquad (186)$$

откуда и опредѣлимъ по даннымъ $N_1 \ldots T_1 \ldots$ направленіе (α, β, γ) элемента, испытывающаго нормальное усиліе, и величину P этого усилія, отнесенную къ единицѣ площади, при чемъ величины α, β, γ, какъ извѣстно, связаны еще уравненіемъ

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \qquad (187)$$

Исключая α, β, γ изъ четырехъ уравненій (186) и (187), мы получимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія величины P:

$$\begin{aligned} P^3 - (N_1+N_2+N_3)P^2 + (N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2)\,P \\ - (N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2) = 0, \end{aligned} \qquad (188)$$

рѣшая которое, получимъ вообще три различныя величины P_1, P_2, P_3 давленія (какъ три корня кубическаго уравненія), удовлетворяющія вышеупомянутымъ условіямъ. Подставляя каждое изъ трехъ значеній P въ уравненія (186), мы найдемъ три серіи величинъ α, β, γ, от-

личныя другъ отъ друга; т. е. нормальному давленію P_1 будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое направленіе $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ нормали элемента, испытывающаго это давленіе, при чемъ величины $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ опредѣлятся при подстановкѣ P_1 въ уравненія (186); точно также давленію P_2 будетъ соотвѣтствовать другой элементъ, опредѣляемый направленіемъ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ его нормали; давленію P_3 будетъ соотвѣтствовать нѣкоторый третій элементъ $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Такимъ образомъ, какъ-бы ни были распредѣлены усилія внутри даннаго твердаго тѣла, черезъ каждую точку внутри его можно провести три поверхностныхъ элемента, на которые будутъ дѣйствовать только перпендикулярныя усилія.

Подставимъ теперь въ урр. (186) величины $P_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, которыя должны имъ удовлетворять; помножимъ эти три уравненія соотвѣтственно на $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и сложимъ; тогда получимъ:

$$\begin{aligned} &P_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 N_1 + \beta_1\beta_2 N_2 + \gamma_1\gamma_2 N_3 + (\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1)\,T_1 \\ &+ (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)\,T_2 + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)\,T_3 . \end{aligned} \tag{189}$$

Точно также, подставляя величины $P_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, помножая на $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, и складывая, получимъ:

$$\begin{aligned} &P_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 N_1 + \beta_1\beta_2 N_2 + \gamma_1\gamma_2 N_3 + (\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1)\,T_1 \\ &+ (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)\,T_2 + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)\,T_3 . \end{aligned} \tag{190}$$

Вычитая урр. (189) и (190) другъ изъ друга, находимъ:

$$(P_1 - P_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0 . \tag{191}$$

Но такъ какъ P_1 и P_2 вообще не равны другъ другу, то ур. (191) можетъ удовлетвориться только когда

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \tag{192}$$

т. е. когда направленія двухъ давленій P_1 и P_2 перпендикулярны другъ къ другу. Точно также докажемъ, что и третье давленіе P_3 перпендикулярно къ двумъ остальнымъ, если только оно отъ нихъ отлично.

Легко также показать, что корни ур. (188) не могутъ быть мнимыми. Дѣйствительно, предположимъ, что ур. (188) имѣетъ мнимые корни; тогда такіе два корня должны имѣть видъ, напримѣръ:

$$P_1 = A + B\sqrt{-1}, \quad P_2 = A - B\sqrt{-1}\,; \tag{193}$$

точно также, опредѣленныя по P_1 и P_2 величины $\alpha_1 \ldots \alpha_2 \ldots$ должны имѣть видъ:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p + a\sqrt{-1}, & \beta_1 &= q + b\sqrt{-1}, & \gamma_1 &= r + c\sqrt{-1}, \\ \alpha_2 &= p - a\sqrt{-1}, & \beta_2 &= q - b\sqrt{-1}, & \gamma_2 &= r - c\sqrt{-1}, \end{aligned} \tag{194}$$

гдѣ p, q, r, a, b, c суть дѣйствительныя величины. Вслѣдствіе (194) уравненіе (192) должно превратится въ

$$p^2 + q^2 + r^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 0\,. \tag{195}$$

что невозможно. Слѣдовательно, невозможны мнимые корни уравненія (188).

Наоборотъ, если намъ даны величины и направленія трехъ **главныхъ** усилій P_1, P_2, P_3, то по нимъ легко опредѣлить шесть усилій $N_1 \ldots T_1 \ldots$. Дѣйствительно, подставимъ въ первое изъ урр. (186) по очереди величины $\alpha_1 \ldots, \alpha_2 \ldots, \alpha_3 \ldots$; полученныя три уравненія умножимъ соотвѣтственно на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, и сложимъ; за тѣмъ помножимъ тѣже уравненія на $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и сложимъ, и точно также —на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; тоже самое выполнимъ съ тремя уравненіями, получаемыми изъ втораго ур. (186), и съ тремя уравненіями, получаемыми изъ третьяго ур. (186). Тогда легко найдемъ:

$$\begin{aligned} N_1 &= \alpha_1^2 P_1 + \alpha_2^2 P_2 + \alpha_3^2 P_3\,, \\ N_2 &= \beta_1^2 P_1 + \beta_2^2 P_2 + \beta_3^2 P_3\,, \\ N_3 &= \gamma_1^2 P_1 + \gamma_2^2 P_2 + \gamma_3^2 P_3\,, \\ T_1 &= \beta_1\gamma_1 P_1 + \beta_2\gamma_2 P_2 + \beta_3\gamma_3 P_3\,, \\ T_2 &= \gamma_1\alpha_1 P_1 + \gamma_2\alpha_2 P_2 + \gamma_3\alpha_3 P_3\,, \\ T_3 &= \alpha_1\beta_1 P_1 + \alpha_2\beta_2 P_2 + \alpha_3\beta_3 P_3\,. \end{aligned} \tag{196}$$

В) ДВИЖЕНІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА ПОДЪ ДѢЙСТВІЕМЪ ПРИЛОЖЕННЫХЪ СИЛЪ. (КИНЕТИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА).

---

§ 45. Количество движенія, его моментъ и кинетическая энергіи свободной неизмѣняемой системы.

Если данная система силъ приложена къ точкамъ свободной неизмѣняемой системы, то тѣ части этихъ силъ, которыя, будучи приложены къ каждымъ двумъ различнымъ точкамъ, направлены въ противоположныя стороны по разстоянію между этими послѣдними и равны другъ другу, очевидно всегда взаимно уравновѣсятся. Такимъ образомъ, измѣненіе движенія будутъ производить только тѣ изъ приложныхъ силъ, величина и направленіе которыхъ не обладаютъ свойствами величины и направленія взаимныхъ силъ. Дѣйствіе такихъ силъ, какъ мы видѣли въ § 25, § 31, § 35, состоитъ въ измѣненіи геометрической суммы количествъ движенія системы, геометрической суммы моментовъ этихъ количествъ движенія, и величины энергіи системы. Измѣненія первыхъ двухъ величинъ, отнесенныя къ единицѣ времени, измѣряются соотвѣтственно геометрическими суммами приложенныхъ силъ и ихъ моментовъ, а приращеніе энергіи—работою внѣшнихъ силъ. Если приложенныя силы обладаютъ по величинѣ и направленію свойствами взаимныхъ силъ или если ихъ совсѣмъ нѣтъ, то геометрическія суммы количествъ движенія и ихъ моментовъ, а также и величина энергіи свободной неизмѣняемой системы, остаются неизмѣнными во все время движенія.

Движеніе неизмѣняемой системы, какъ мы видѣли въ § 12, опредѣляется для каждаго промежутка времени вращеніемъ системы около опредѣленной оси и ея поступательнымъ движеніемъ. Для опредѣленія вліянія приложенныхъ силъ на это движеніе, мы должны прежде всего найти зависимость между вращательными и поступательными скоростями, съ одной стороны, и упомянутыми выше величинами, непосредственно измѣняемыми силами,—съ другой стороны.

Начнемъ съ количества движенія. Если m будетъ масса одной какой-либо изъ матеріальныхъ точекъ неизмѣняемой системы, и v_x, v_y, v_z—три слагающія скорости этой точки по осямъ координатъ, то слагающія величины количества движенія по тѣмъ-же осямъ выразятся алгебраическими суммами

$$\Sigma m v_x\,, \quad \Sigma m v_y\,, \quad \Sigma m v_z\,, \tag{197}$$

взятыми для всѣхъ точекъ и скоростей данной системы. Но такъ какъ на основаніи § 15, (93):

$$\begin{aligned} v_x &= \mathfrak{u} + ry - qz\,, \\ v_y &= \mathfrak{v} + pz - rx\,, \\ v_z &= \mathfrak{w} + qx - py\,, \end{aligned} \tag{198}$$

гдѣ слагающія поступательнаго движенія $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, и угловой скорости, p, q, r, суть однѣ и тѣже для всѣхъ точекъ системы, то мы получимъ:

$$\begin{aligned} \Sigma m v_x &= \mathfrak{u}\Sigma m + r\Sigma my - q\Sigma mz\,, \\ \Sigma m v_y &= \mathfrak{v}\Sigma m + p\Sigma mz - r\Sigma mx\,, \\ \Sigma m v_z &= \mathfrak{w}\Sigma m + q\Sigma mx - p\Sigma my\,. \end{aligned} \tag{199}$$

Обозначая черезъ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ координаты центра инерціи системы и помня § 22, (27), мы получимъ изъ (199):

$$\begin{aligned} \Sigma m v_x &= (\mathfrak{u} + r\bar{y} - q\bar{z})\,\Sigma m\,, \\ \Sigma m v_y &= (\mathfrak{v} + p\bar{z} - r\bar{x})\,\Sigma m\,, \\ \Sigma m v_z &= (\mathfrak{w} + p\bar{x} - p\bar{y})\,\Sigma m\,. \end{aligned} \tag{200}$$

Но выраженія въ скобкахъ представляютъ очевидно, по (198), скорости центра инерціи; поэтому, обозначая эти послѣднія черезъ $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$, мы выводимъ, что

$$\Sigma m v_x = \bar{v}_x \Sigma m\,, \quad \Sigma m v_y = \bar{v}_y \Sigma m\,, \quad \Sigma m v_z = \bar{v}_z \Sigma m\,, \tag{201}$$

т. е. что количество движенія системы выражается количествомъ движенія ея центра инерціи, къ которому отнесена вся масса Σm системы. Если ось вращенія мы выберемъ проходящею черезъ центръ инерціи, то очевидно:

$$\bar{v}_x = \mathfrak{u}\,, \quad \bar{v}_y = \mathfrak{v}\,, \quad \bar{v}_z = \mathfrak{w}\,. \tag{202}$$

Слагающія геометрической суммы моментовъ количествъ движенія

будутъ, на основаніи § 24, (48):

$$\Sigma(v_y z - v_z y)\,m\,,\qquad \Sigma(v_z x - v_x z)\,m\,,\qquad \Sigma(v_x y - v_y x)\,m\,, \tag{203}$$

которыя, на основаніи (198), представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\Sigma(v_y z - v_z y)m &= (\mathfrak{v}\bar{z} - \mathfrak{w}\bar{y})\,\Sigma m - r\Sigma mxz - q\Sigma mxy + p\Sigma m\,(y^2+z^2),\\
\Sigma(v_z x - v_x z)m &= (\mathfrak{w}\bar{x} - \mathfrak{u}z)\,\Sigma m - p\Sigma myx - r\Sigma myz + q\Sigma m\,(z^2+x^2),\\
\Sigma(v_x y - v_y x)m &= (\mathfrak{u}y - \mathfrak{v}x)\,\Sigma m - q\Sigma mzx - p\Sigma mzy + r\Sigma m\,(x^2+y^2),
\end{aligned} \tag{204}$$

при чемъ первые члены правыхъ частей въ (204), выражающіе моменты количества движенія центра инерціи, черезъ который проходитъ ось вращенія, обращаются въ нули, если начало координатъ выбрано въ центрѣ инерціи.

Приращеніе количества энергіи E неизмѣняемой системы будетъ измѣряться приращеніемъ одной только ея кинетической энергіи T, такъ какъ приращеніе ея потенціальной энергіи, вслѣдствіе неизмѣняемости разстояній между точками системы, всегда равно нулю. Такъ какъ

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\,, \tag{205}$$

то, на основаніи (198), будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
T = &\frac{1}{2}(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\,\Sigma m\\
&+ \frac{1}{2}p^2\Sigma m\,(y^2+z^2) + \frac{1}{2}q^2\Sigma m\,(z^2+x^2) + \frac{1}{2}r^2\Sigma m\,(x^2+y^3)\\
&- qr\Sigma myz - rp\Sigma mzx - pq\Sigma mxy\\
&+ p\,(\mathfrak{w}\bar{y} - \mathfrak{v}\bar{z})\,\Sigma m + q\,(\mathfrak{u}\bar{z} - \mathfrak{w}\bar{x})\,\Sigma m + r\,(\mathfrak{v}\bar{x} - \mathfrak{u}\bar{y})\,\Sigma m\,,
\end{aligned} \tag{206}$$

гдѣ три послѣдніе члена обращаются въ нули, если начало координатъ выбрано въ центрѣ инерціи.

Величины, выраженныя суммами

$$\begin{gathered}
\Sigma m\,(y^2+z^2)\,,\qquad \Sigma m\,(z^2+x^2)\,,\qquad \Sigma m\,(x^2+y^2)\,,\\
\Sigma myz\,,\qquad \Sigma mzx\,,\qquad \Sigma mxy\,,
\end{gathered} \tag{207}$$

входящія въ выраженія моментовъ количествъ движенія и въ выраженіе кинетической энергіи неизмѣняемой системы, опредѣляются только геометрическимъ распредѣленіемъ массъ системы. Первыя три суммы (207) носятъ названіе **моментовъ инерціи** системы, соотвѣт-

ственно около осей x-овъ, y-овъ и z-овъ; послѣднія три суммы называются моментами девіаціи или произведеніями инерціи около тѣхъ-же соотвѣтственныхъ осей.

§ 46. Главныя свойства моментовъ инерціи.

Произведеніе изъ массы данной матеріальной точки и квадрата ея разстоянія отъ данной прямой называется моментомъ инерціи этой точки около упомянутой линіи, какъ оси. Если дано нѣсколько матеріальныхъ точекъ, то алгебраическая сумма названныхъ выше произведеній представитъ моментъ инерціи системы матеріальныхъ точекъ около данной оси. Такимъ образомъ, если мы черезъ m обозначимъ массу какой-либо матеріальной точки системы и черезъ r—ея разстояніе отъ нѣкоторой оси, то моментъ инерціи, H, системы около этой оси представится алгебраическою суммою

$$H = \Sigma m r^2, \tag{208}$$

гдѣ сумма берется по всѣмъ точкамъ системы и разстоянія r опредѣляются отъ одной и той-же прямой.

Если масса системы непрерывно расположена въ данномъ объемѣ, то масса каждой безконечно малой части объема можетъ быть разсматриваема, какъ отдѣльная матеріальная точка. Обозначая черезъ $d\Omega$ элементъ объема и черезъ k плотность массы въ немъ заключенной, мы выразимъ массу каждаго элемента объема произведеніемъ $k d\Omega$, при чемъ k для каждаго элемента объема вообще можетъ быть различнымъ. Въ такомъ случаѣ моментъ инерціи представится въ видѣ:

$$H = \Sigma k r^2 d\Omega\,, \tag{208'}$$

гдѣ сумма берется по всѣмъ элементамъ даннаго объема. Если мы выберемъ ось момента инерціи за ось x-овъ, то очевидно, $r^2 = y^2 + z^2$, и слѣдовательно, обозначая черезъ H_x моментъ инерціи системы около оси x-овъ, будемъ имѣть: $H_x = \Sigma m\,(y^2 + z^2)$. Если кромѣ того H_y и H_z будутъ моменты инерціи около осей y-овъ и z-овъ, то вообще:

$$H_x = \Sigma m\,(y^2 + z^2)\,, \qquad H_y = \Sigma m\,(z^2 + x^2)\,, \qquad H_z = \Sigma m\,(x^2 + y^2)\,. \tag{209}$$

Представимъ себѣ нѣкоторую линію, проходящую параллельно оси x-овъ черезъ центръ инерціи системы, и найдемъ, насколько

моментъ инерціи H_x' около этой линіи будетъ отличаться отъ стараго H_x. Начало координатъ перенесемъ въ центръ инерціи, и координаты точекъ системы относительно новаго начала обозначимъ черезъ x', y', z'. Тогда очевидно, мы будемъ имѣть:

$$x = \bar{x} + x', \qquad y = \bar{y} + y', \qquad z = \bar{z} + z',$$

гдѣ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ суть координаты центра инерціи по старому началу. Такимъ образомъ мы получимъ:

$$\Sigma m\,(y^2 + z^2) = (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\,\Sigma m + 2\bar{y}\Sigma m y' + 2\bar{z}\Sigma m z' + \Sigma m\,(y'^2 + z'^2)\,. \tag{210}$$

Но такъ какъ $\Sigma m y' = \Sigma m z' = 0$, ибо начало координатъ x'-овъ, y'-овъ . . взято въ центрѣ инерціи, то мы получаемъ изъ (210):

$$H_x = (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\,\Sigma m + H_x'; \tag{211}$$

т. е. моментъ инерціи около данной оси равенъ моменту инерціи около другой оси, параллельной данной и проходящей черезъ центръ инерціи системы, сложенному съ моментами инерціи около старой оси всей массы системы, сосредоточенной въ ея центрѣ инерціи. Отсюда слѣдуетъ, что моментъ инерціи около оси, проходящей черезъ центръ инерціи, будетъ наименьшій изъ всѣхъ моментовъ около осей, параллельныхъ данной и проходящихъ черезъ различныя точки. Кромѣ того моменты инерціи около взаимно параллельныхъ осей, расположенныхъ на равныхъ разстояніяхъ отъ центра инерціи, равны между собою.

Зная моменты инерціи H_x, H_y, H_z около трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, проходящихъ черезъ центръ инерціи, легко найти моментъ инерціи H около всякой другой оси, проходящей черезъ центръ инерціи, и образующей углы α, β, γ съ тремя данными осями.

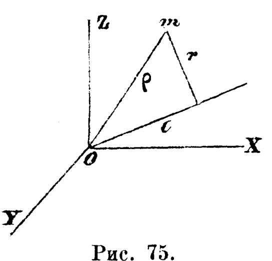


Рис. 75.

Пусть OX, OY, OZ будутъ направленія (рис. 75) трехъ данныхъ осей и Ol — направленіе оси искомаго момента H; пусть m будетъ нѣкоторая точка (x, y, z) системы, ρ — ея разстоянія отъ центра, r — ея разстояніе отъ оси Ol, l — длина вдоль Ol отъ O до подошвы перпендикуляра r. Тогда очевидно:

$$r^2 = \rho^2 \sin^2(\rho, l),$$

$$\cos(\rho, l) = \frac{x}{\rho}\cos\alpha + \frac{y}{\rho}\cos\beta + \frac{z}{\rho}\cos\gamma,$$

$$\sin^2(\rho, l) = 1 - \left(\frac{x}{\rho}\cos\alpha + \frac{y}{\rho}\cos\beta + \frac{z}{\rho}\cos\gamma\right)^2$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

слѣдовательно:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

или помня, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1:$$

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Затѣмъ обозначая выраженія

$$\Sigma m(y^2 + z^2), \quad \Sigma m(z^2 + x^2), \quad \Sigma m(x^2 + y^2), \quad \Sigma myz, \quad \Sigma mzx, \quad \Sigma mxy,$$

соотвѣтственно черезъ (212)

$$H_x, \quad H_y, \quad H_z, \quad Q_x, \quad Q_y, \quad Q_z,$$

мы получаемъ:

$$H = \Sigma mr^2 = H_x\cos^2\alpha + H_y\cos^2\beta + H_z\cos^2\gamma$$
$$- 2Q_x\cos\beta\cos\gamma - 2Q_y\cos\gamma\cos\alpha - 2Q_z\cos\alpha\cos\beta. \qquad (213)$$

Такимъ образомъ опредѣлится H около всякой оси (α, β, γ), если извѣстны моменты инерціи и девіаціи около трехъ осей координатъ. Законъ измѣненія величины момента инерціи съ измѣненіемъ направленія его оси мы можемъ представить графически слѣдующимъ способомъ. Отложимъ отъ начала O вдоль по направленію оси инерціи длину, равную $\frac{1}{\sqrt{H}}$. Съ измѣненіемъ положенія оси измѣнится величина H, а слѣдовательно и длина $\frac{1}{\sqrt{H}}$, отложенная нами на этой оси. Если мы проведемъ черезъ O всевозможныя оси и на каждой изъ нихъ отложимъ упомянутымъ образомъ длины $\frac{1}{\sqrt{H}}$, то концы такихъ линій образуютъ нѣкоторую поверхность, облегающую начало O. Наоборотъ, проведя разъ упомянутую поверхность вокругъ точки O, мы опредѣлимъ величину момента инерціи для лю-

бой оси, совпадающей по своему направленію съ однимъ изъ радіусовъ векторовъ этой поверхности. Дѣйствительно, если длина упомянутаго радіуса вектора будетъ ρ, то моментъ инерціи около оси, съ нимъ совпадающей, будетъ очевидно $\frac{1}{\rho^2}$. Всякую поверхность мы считаемъ тогда намъ извѣстною, когда знаемъ соотношеніе между координатами точекъ на ней лежащихъ, т. е. когда знаемъ уравненіе этой поверхности; ибо въ такомъ случаѣ мы можемъ точка за точкой построить всю поверхность. Найдемъ поэтому уравненіе поверхности, на которой лежатъ концы линій длины $\frac{1}{\sqrt{H}}$, проведенныхъ вдоль по различнымъ осямъ (α, β, γ). Пусть x, y, z будутъ координаты конца одной изъ такихъ линій; тогда очевидно:

$$x = \frac{1}{\sqrt{H}} \cos\alpha\,, \quad y = \frac{1}{\sqrt{H}} \cos\beta\,, \quad z = \frac{1}{\sqrt{H}} \cos\gamma\,,$$

откуда

$$\cos\alpha = x\sqrt{H}\,, \quad \cos\beta = y\sqrt{H}\,, \quad \cos\gamma = z\,; \tag{214}$$

подставляя эти величины въ (213), находимъ слѣдующее уравненіе поверхности:

$$1 = H_x x^2 + H_y y^2 + H_z z^2 - 2Q_x yz - 2Q_y zx - 2Q_z xy\,, \tag{215}$$

которое представитъ эллипсоидъ, называемый **эллипсоидомъ инерціи**. Геометрія учитъ, что съ измѣненіемъ направленія прямоугольной системы координатъ видъ уравненія (215) не измѣняется; а измѣняется только величина коеффиціентовъ H и Q. Между различными системами прямоугольныхъ координатъ, проходящихъ черезъ одну и туже точку O, мы можемъ выбрать такую, относительно которой уравненіе даннаго эллипсоида не будетъ содержать произведеній координатъ. Въ такомъ случаѣ оси координатъ совпадутъ съ главными осями эллипсоида, коеффиціенты H_x, H_y, H_z обратятся въ нѣкоторыя H_1, H_2, H_3, а коеффиціенты Q въ нули; уравненіе же эллипсоида приметъ видъ:

$$H_1 x^2 + H_2 y^2 + H_3 z^2 = 1\,. \tag{216}$$

Величины H_1, H_2, H_3 очевидно представятъ моменты инерціи около главныхъ осей эллипсоида. Эти моменты называются **главными**, а ихъ оси—**главными осями инерціи**. Моменты девіаціи около главныхъ осей инерціи очевидно равны нулю. Если положеніе

и величина главныхъ осей и моментовъ инерціи извѣстны, то моментъ инерціи H около оси образующей углы α, β, γ съ главными осями будетъ очевидно:

$$H = H_1 \cos^2 \alpha + H_2 \cos^2 \beta + H_3 \cos^2 \gamma \,. \tag{217}$$

Интегральное исчисленіе даетъ способы производить алгебраическое суммованіе безконечно большаго числа безконечно малыхъ слагаемыхъ въ выраженіи (208)'.

Ниже приведены полученныя этими способами выраженія для центральныхъ моментовъ инерціи нѣкоторыхъ однородныхъ тѣлъ.

Тѣло.	Ось момента.	Моментъ инерціи.
1. Сфера, радіуса r.	всякій діаметръ	$\frac{8\pi r^5}{15} k$
2. Сфероидъ; полярная полуось a, экватор. радіусъ r . . .	поляр. ось	$\frac{8\pi a r^4}{15} k$
3. Эллипсоидъ, съ полуосями a, b, c	ось $2a$	$\frac{4\pi abc\,(b^2 + c^2)}{15} k$
4. Сферическій слой, съ внѣшн. и внутр. радіусами r и r' .	всякій діаметръ	$\frac{8\pi(r^5 - r'^5)}{15} k$
5. Эллипт. цилиндръ; длина $2a$, поперечн. полуоси b и c .	прод. ось $2a$	$\frac{\pi abc\,(b^2 + c^2)}{2} k$
6. Тоже	поперечн. ось $2b$	$\frac{\pi abc\,(3c^2 + 4a^2)}{6} k$
7. Полый круглый цилиндръ; длина $2a$, внѣшній и внутрен. радіусы r и r'.	прод. ось $2a$	$\pi a\,(r^4 - r'^4)\,k$
8. Тоже	поперечн. діаметръ.	$\frac{\pi a}{6}\left\{3\,(r^4 - r'^4) + 4a^2\,(r^2 - r'^2)\right\} k$
9. Прямоуг. параллелепипедъ, ребра $2a$, $2b$, $2c$	ось $2a$	$\frac{8abc\,(b^2 + c^2)}{3} k$
10. Конусъ; высота h, радіусъ r. .	ось h	$\frac{\pi h r^4}{10} k$

§ 47. Неизмѣняемое движеніе свободнаго твердаго тѣла.

Если свободное твердое тѣло движется безъ дѣйствія на него внѣшнихъ силъ (по инерціи), то величины, выраженія которыхъ приведены въъ § 45, остаются неизмѣнными во все время движенія. Разберемъ кинематическое значеніе ихъ постоянства.

Неизмѣняемость величины и направленія количества движенія, то есть величины его слагающихъ

$$\bar{v}_x\Sigma m\,, \quad \bar{v}_y\Sigma m\,, \quad \bar{v}_z\Sigma m\,. \tag{218}$$

указываетъ на то, что центръ инерціи твердаго тѣла движется прямолинейно и равномѣрно, или остается въ покоѣ.

Выраженія (204) представляютъ слагающіе моменты количества движенія по произвольно выбраннымъ осямъ координатъ. Результирующій моментъ, опредѣленный по этимъ тремъ слагающимъ, долженъ оставаться для всякаго времени однимъ и тѣмъ-же по величинѣ и направленію, какъ-бы ни были выбраны для различныхъ временъ оси координатъ. Если мы будемъ относить движеніе точекъ тѣла постоянно къ однѣмъ и тѣмъ-же осямъ координатъ, то постоянство величины и направленія момента количества движенія обусловитъ очевидно постоянство величинъ его проложеній на однѣ и тѣже оси. Въ такомъ случаѣ каждая изъ трехъ величинъ (204) должна оставать во время движенія неизмѣнною; но координаты центра инерціи $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, угловыя скорости p, q, r около неизмѣнныхъ осей и координаты точекъ тѣла x, y, z вообще будутъ измѣняться со временемъ (см. § 15). Если мы будемъ относить движеніе къ осямъ координатъ неизмѣнно соединеннымъ съ тѣломъ, то положеніе точекъ системы относительно ихъ остается неизмѣннымъ, и величины x, y, z, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ будутъ однѣ и тѣже во все время движенія; слѣдовательно, величины моментовъ инерціи и девіаціи останутся постоянными; но угловыя скорости p, q, r и проложенія момента количества движенія на наши измѣняющіяся въ своемъ положеніи со временемъ оси координатъ будутъ для различныхъ временъ различны. Тѣмъ не менѣе, опредѣленный по упомянутымъ проложеніямъ результирующій моментъ будетъ для всякаго времени одинъ и тотъ-же.

Начало неизмѣнно связанной съ тѣломъ системы координатъ выберемъ въ центрѣ инерціи, а направленія осей координатъ—по главнымъ осямъ инерціи. Тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{gathered}\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0\,,\qquad \Sigma myz=\Sigma mzx=\Sigma mxy=0\,,\\ \Sigma m(y^2+z^2)=H_1\,,\qquad \Sigma m(z^2+x^2)=H_2\,,\qquad \Sigma m(x^2+y^2)=H_3\,.\end{gathered}\tag{219}$$

Кромѣ того, обозначая черезъ $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, проложенія геометрической суммы моментовъ количествъ движенія на выбранныя нами оси координатъ, мы получимъ для каждаго момента времени изъ (204):

$$\mathfrak{L}=pH_1\,,\qquad \mathfrak{M}=qH_2\,,\qquad \mathfrak{N}=rH_3\,.\tag{220}$$

Начало, около котораго берутся моменты $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ не остается неподвижнымъ въ пространствѣ, но движется прямолинейно и равномѣрно, при чемъ слѣдовательно моментъ количества движенія подвижнаго начала (т. е. центра инерціи) остается одинъ и тотъ-же относительно даннаго неподвижнаго начала. Но такъ какъ съ одной стороны, моментъ около неподвижнаго начала равенъ суммѣ изъ момента около центра инерціи и момента количества движенія самаго центра инерціи около неподвижнаго начала (см. § 23, § 24), и этотъ послѣдній не измѣняется, а съ другой стороны, долженъ оставаться постояннымъ весь моментъ количества движеній около неподвижнаго начала, то слѣдовательно, моментъ около подвижнаго центра инерціи, опредѣляемый слагающими $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, долженъ тоже оставаться неизмѣннымъ со временемъ. Если мы такимъ образомъ для каждаго времени будемъ проводить черезъ центръ инерціи тѣла линію, представляющую по величинѣ и направленію моментъ $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, то эта линія должна оставаться сама себѣ параллельною и одинаковою по длинѣ во все время движенія. Если мы обозначимъ черезъ M величину момента $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, то очевидно,

$$\mathrm{M}^2=\mathfrak{L}^2+\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2,\tag{121}$$

при чемъ M остается всегда одно и тоже, а величины $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, будучи проложеніями длины M на измѣняющія свое положеніе оси координатъ, тоже измѣняются со временемъ. Обозначая далѣе черезъ ω величину угловой скорости тѣла около оси, проходящей черезъ его центръ инерціи, а чересъ α, β, γ—углы этой оси съ главными осями инерціи, мы имѣемъ:

$$p=\omega\cos\alpha\,,\qquad q=\omega\cos\beta\,,\qquad r=\omega\cos\gamma\,,$$

и на основаніи (220) и (221):

$$\mathrm{M}^2=\omega^2(H_1{}^2\cos^2\alpha+H_2{}^2\cos^2\beta+H_3{}^2\cos^2\gamma),\tag{222}$$

гдѣ M есть данная постоянная величина. Углы момента M съ осями

инерцiи опредѣлятся для каждаго момента времени очевидно слѣдующимъ образомъ:

$$\cos(\mathbf{M},x)=\frac{\mathfrak{L}}{\mathbf{M}}=\frac{H_1}{\sqrt{H_1{}^2\cos^2\alpha+H_2{}^2\cos^2\beta+H_3{}^2\cos^2\gamma}}\cdot\cos\alpha\,,$$

$$\cos(\mathbf{M},y)=\frac{\mathfrak{M}}{\mathbf{M}}=\frac{H_2}{\sqrt{H_1{}^2\cos^2\alpha+H_2{}^2\cos^2\beta+H_3{}^2\cos^2\gamma}}\cdot\cos\beta\,,\qquad(223)$$

$$\cos(\mathbf{M},z)=\frac{\mathfrak{N}}{\mathbf{M}}=\frac{H_3}{\sqrt{H_1{}^2\cos^2\alpha+H_2{}^2\cos^2\beta+H_3{}^2\cos^2\gamma}}\cdot\cos\gamma\,,$$

откуда видимъ, что ось вращенiя вообще не совпадаетъ съ постояннымъ направленiемъ момента M; оба эти направленiя образуютъ между собою нѣкоторый уголъ (M,ω), при чемъ очевидно,

$$\cos(\mathbf{M},\omega)=\frac{H_1\cos^2\alpha+H_2\cos^2\beta+H_3\cos^2\gamma}{\sqrt{H_1{}^2\cos^2\alpha+H_2{}^2\cos^2\beta+H_1{}^2\cos^2\gamma}}\,.\qquad(224)$$

Слѣдовательно, вращенiе тѣла не можетъ вообще происходить около одной и той-же неизмѣнной оси вращенiя, ибо въ такомъ случаѣ линiя, представляющая направленiе и величину момента M, должна-бы была вращаться около этой оси, и не осталась-бы неизмѣнною въ пространствѣ. Исключенiе можетъ быть, только когда $\cos(\mathbf{M},\omega)=1$, т. е. когда ось вращенiя совпадаетъ съ однимъ изъ моментовъ инерцiи, или когда всѣ три эти момента равны между собою.

Кинетическая энергiя неизмѣняемой системы, представляющая собою всю энергiю твердаго тѣла, выразится, при вышеописанномъ выборѣ начала и направленiя осей координатъ, на основанiи (206), слѣдующимъ образомъ:

$$T=\frac{1}{2}(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)\Sigma m+\frac{1}{2}p^2H_1+\frac{1}{2}q^2H_2+\frac{1}{2}r^2H_3\,,\qquad(225)$$

и представитъ собою сумму двухъ неизмѣняющихся со временемъ величинъ: кинетической энергiи центра инерцiи:

$$\mathrm{T}_0=\frac{1}{2}(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)\Sigma m\qquad(226)$$

и кинетической энергiи движенiя вокругъ центра инерцiи:

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}(p^2H_1+q^2H_2+r^2H_3),\qquad(227)$$

или:

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}(p\mathfrak{L}+q\mathfrak{M}+r\mathfrak{N})\,.\qquad(227)'$$

Такъ какъ скорость центра инерціи остается неизмѣнною, то такою-же остается и T_0; но съ другой стороны, должна оставаться постоянною величина T; слѣдовательно, T тоже постоянно во все время неизмѣняемаго движенія тѣла. Вводя величины $\omega, \alpha, \beta, \gamma$ въ (227), мы получимъ:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2(H_1\cos^2\alpha + H_2\cos^2\beta + H_3\cos^2\gamma). \qquad (227)''$$

и, сравнивая затѣмъ выраженія M^2, $\cos(M,\omega)$, T, находимъ, что

$$\omega_1\cos(M,\omega) = \frac{2T}{M}, \qquad (228)$$

т. е. что проложеніе угловой скорости (отложенной конечно по оси вращенія) на направленіе момента количества движенія остается во время движенія постояннымъ.

Пояснимъ геометрически значеніе выведенныхъ выше законовъ измѣненія угловой скорости и направленія оси вращенія при неизмѣняемомъ движеніи твердаго тѣла. Вообразимъ себѣ очерченный внутри тѣла центральный эллипсоидъ инерціи, который будетъ очевидно вращаться вмѣстѣ съ тѣломъ около его центра инерціи. Пусть OH_1, OH_2, OH_3 (рис. 76) будутъ для даннаго времени положенія главныхъ осей этого эллипсоида, OH—положеніе мгновенной оси вращенія тѣла, образующей углы α, β, γ съ осями инерціи. Тогда, на основаніи § 46:

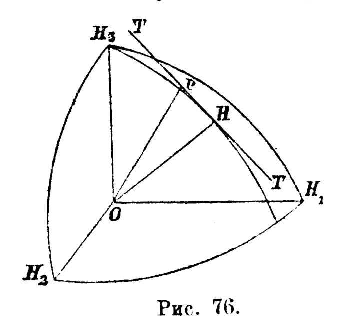


Рис. 76.

$$\overline{OH_1} = \frac{1}{\sqrt{H_1}}, \quad \overline{OH_2} = \frac{1}{\sqrt{H_2}}, \quad \overline{OH_3} = \frac{1}{\sqrt{H_3}},$$
$$\overline{OH} = \frac{1}{\sqrt{H_1\cos^2\alpha + H_2\cos^2\beta + H_3\cos^2\gamma}}; \qquad (229)$$

уравненіе эллипсоида представится въ видѣ:

$$\frac{x^2}{\overline{OH_1}^2} + \frac{y^2}{\overline{OH_2}^2} + \frac{z^2}{\overline{OH_3}^2} = 1,$$

или:

$$H_1x^2 + H_2y^2 + H_3z^2 = 1. \qquad (230)$$

Черезъ точку H, координаты которой, x_1, y_1, z_1, будутъ:

$$x_1 = \overline{OH}.\cos\alpha\,, \quad y_1 = \overline{OH}.\cos\beta\,, \quad z_1 = \overline{OH}.\cos\gamma\,, \qquad (231)$$

проведемъ къ эллипсоиду касательную плоскость, уравненіе которой, какъ извѣстно, будетъ:

$$H_1x_1x + H_2y_1y + H_3z_1z = 1\ ^{*}). \qquad (231)'$$

---

*) Уравненіе всякой плоскости должно вообще имѣть видъ:

$$ax + by + cz = d. \qquad (\alpha)$$

Чтобы эта плоскость касалась даннаго эллипсоида,

$$H_1x^2 + H_2y^2 + H_3z^2 = 1, \qquad (\beta)$$

въ точкѣ (x_1, y_1, z_1), должно коэффиціенты a, b, c, d опредѣлить по слѣдующимъ условіямъ. Такъ какъ точка касанія принадлежитъ въ одно и тоже время эллипсоиду (β) и плоскости (α), то ея координаты должны удовлетворять обоимъ уравненіямъ (α) и (β); слѣдовательно:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d \quad \text{и} \quad H_1x_1^2 + H_2y_1^2 + H_3z_1^2 = 1\,. \qquad (\gamma)$$

Кромѣ того всѣ точки, лежащія въ плоскости (α), безконечно близко отъ точки касанія, должны также принадлежать и эллипсоиду, ибо касательной плоскостію называется такая, которой безконечно малый плоскій элементъ совпадаетъ съ таковымъ-же элементовъ эллипсоида. Слѣдовательно, если мы вообразимъ въ плоскости (α) нѣкоторую точку, координаты которой отличаются отъ координатъ x_1, y_1, z_1 на безконечно малыя величины dx, dy, dz, то должны имѣть:

$$a(x_1 + dx) + b(y_1 + dy) + c(z_1 + dz) = d$$

и

$$H_1(x_1 + dx)^2 + H_2(y_1 + dy)^2 + H_3(z_1 + dz)^2 = 1,$$

или, на основаніи (γ), и пренебрегая квадратами dx^2, dy^2, dz^2, которые безконечно меньше ихъ первыхъ степеней:

$$\left.\begin{aligned} adx + bdy + cdz &= 0, \\ 2H_1x_1dx + 2H_2y_1dy + 2H_3z_1dz &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

Такъ какъ второе изъ уравненій (δ) должно имѣть мѣсто при всякихъ величинахъ dx, dy, dz, удовлетворяющихъ первому, и наоборотъ, то умножая одно изъ уравненій (δ) на совершенно произвольный множитель λ и складывая его съ другимъ уравненіемъ, получаемъ:

$$(\lambda a + 2H_1x_1)\,dx + (\lambda b + 2H_2y_1)\,dy + (\lambda c + 2H_3z_1)\,dz = 0, \qquad (\varepsilon)$$

гдѣ величины dx, dy, dz могутъ быть разсматриваемы, какъ совершенно произвольныя и независимыя другъ отъ друга величины, если множитель λ будетъ опредѣленъ такъ, чтобы одинъ изъ коэффиціентовъ при dx, dy или dz обращался въ нуль (Сравн. § 42, (83)); вслѣдствіе этого заключаемъ, что

$$\lambda a + 2H_1x_1 = 0, \quad \lambda b + 2H_2y_1 = 0, \quad \lambda c + 2H_3z_1 = 0$$

и что уравненія (γ) превратятся въ

$$2H_1x_1^2 + 2H_2y_1^2 + 2H_3z_1^2 = -\lambda d, \quad \text{и} \quad H_1x_1^2 + H_2y_1^2 + H_3z_1^2 = 1\,,$$

Длина перпендикуляра OP, изъ начала координатъ на плоскость (231), будетъ

$$\overline{OP}=\frac{1}{\sqrt{H_1^2x_1^2+H_2^2y_1^2+H_3^2z_1^2}}, \quad \text{(Сравн. § 43, (115))}$$

или, на основаніи (231) и (229):

$$\overline{OP}=\frac{\sqrt{H_1\cos^2\alpha+H_2\cos^2\beta+H_3\cos^2\gamma}}{\sqrt{H_1^2\cos^2\alpha+H_2^2\cos^2\beta+H_3^2\cos^2\gamma}}=\frac{\sqrt{2T}}{\mathbf{M}}. \tag{232}$$

Косинусъ угла между OP и OH будетъ очевидно на основаніи (229):

$$\begin{aligned}\cos(\overline{OP},\omega)=\cos POH=\frac{OH}{OP}\\ =\frac{H_1\cos^2\alpha+H_2\cos^2\beta+H_3\cos^2\gamma}{\sqrt{H_1^2\cos^2\alpha+H_2^2\cos^2\beta+H_3^2\cos^2\gamma}},\end{aligned} \tag{233}$$

вслѣдствіе чего, по (224):

$$\cos(\overline{OP},\mathbf{M})=\cos(\mathbf{M},\omega), \tag{234}$$

откуда заключаемъ, что направленіе линіи OP должно совпадать съ направленіемъ момента количествъ движенія. Слѣдовательно, длина линіи OP (см. 232) остается неизмѣнной, а ея положеніе въ пространствѣ—само себѣ параллельнымъ во время неизмѣняемаго движенія твердаго тѣла или, что все равно, его эллипсоида инерціи. Точно также остается всегда сама себѣ параллельна и плоскость (231)′, которой касается эллипсоидъ инерціи. Очевидно также, что касательная плоскость, проведенная черезъ противоположный конецъ оси вращенія, будетъ параллельна плоскости (231)′ и на такомъ-же разстояніи отъ центра. Такимъ образомъ, неизмѣняемое движеніе эллипсоида инерціи состоитъ въ томъ, что онъ послѣдовательно разными своими точками касается нѣкоторыхъ двухъ параллельныхъ плоскостей, движущихся въ пространствѣ равномѣрно и параллельно самимъ себѣ, притомъ касается такъ, что разстоянія его центра отъ упомянутыхъ плоскостей остаются одни и тѣже, при чемъ діаметръ эллипсоида, проходящій черезъ обѣ точки касанія, служитъ мгновен-

---

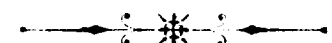
откуда видимъ, что $\lambda=-2$, и уравненіе касательной плоскости,

$$\lambda ax+\lambda by+\lambda cz=\lambda d,$$

обращается въ

$$Hx_1x+H_2y_1y+H_3z_1z=1.$$

ною осью вращенія. Слѣдовательно, осями вращенія во время движенія перебываютъ всѣ тѣ діаметры, касательныя плоскости черезъ концы которыхъ находятся на одномъ и томъ-же разстояніи отъ его центра; положенія въ пространствѣ этихъ діаметровъ будетъ таково, что упомянутое разстояніе прійдется всегда направленнымъ параллельно одной и той-же линіи. Подобныхъ діаметровъ можно найти внутри эллипсоида инерціи безконечное множество, и всѣ они образуютъ собою поверхность нѣкотораго конуса, неизмѣнно связаннаго съ тѣломъ. Этотъ конусъ представитъ собою катящійся конусъ K, описанный въ § 12. Катящійся конусъ, пересѣкаясь съ эллипсоидомъ инерціи, образуетъ на этомъ послѣднемъ кривую, называемую полодіею, (polhodos), которая представляетъ собою слѣдъ на эллипсоидѣ мгновенныхъ полюсовъ вращенія или точекъ соприкосновенія эллипсоида съ неизмѣнною по направленію плоскостію. Неизмѣнный конусъ L, описываемый въ пространствѣ послѣдовательными мгновенными осями вращенія около линіи OP, будетъ перемѣщаться въ пространствѣ параллельно самому себѣ, не измѣняя своего положенія относительно плоскости TT. Точки его пересѣченія съ плоскостію TT образуютъ кривую, называемую эрполодіею (herpolhodos), которая представляетъ собою слѣдъ мгновенныхъ полюсовъ вращенія на неизмѣнной плоскости. Во время движенія послѣдовательныя точки полодіи совпадаетъ съ послѣдовательными точками эрполодіи.



Пусть x, y, z будутъ координаты одной изъ точекъ полодіи. Такъ какъ эта точка лежитъ на эллипсоидѣ инерціи, то ея координаты должны удовлетворять уравненію этого эллипсоида,

$$H_1x^2 + H_2y^2 + H_3z^2 = 1\,; \tag{235}$$

съ другой стороны, разстояніе касательной плоскости къ эллипсоиду черезъ точку (x, y, z) отъ его центра должно быть равно данной постоянной длинѣ $\overline{OP}$; слѣдовательно (по (231)):

$$H_1^2x^2 + H_2^2y^2 + H_3^2z^2 = \frac{1}{\overline{OP}^2}\,. \tag{236}$$

Всякая точка, координаты которой удовлетворяютъ урр. (235) и (236), будетъ принадлежать полодіи. Упомянутыя урр. представятъ полодію, какъ линію пересѣченія двухъ эллипсоидовъ (235) и (236),

описанныхъ около общаго центра, и направленія осей которыхъ совпадаютъ. Дѣля уравненіе (235) на OP^2 и вычитая его изъ (236), мы находимъ:

$$H_1\left(H_1-\frac{1}{\overline{OP}^2}\right)x^2+H_2\left(H_2-\frac{1}{\overline{OP}^2}\right)y^2+H_3\left(H_3-\frac{1}{\overline{OP}^2}\right)z^2=0. \quad (237)$$

Такъ какъ точки полодіи очевидно удовлетворяютъ уравненію (237), то это послѣднее, вмѣстѣ съ ур. (235), тоже будетъ опредѣлять полодію, представляя ее, какъ линію пересѣченія эллипсоида (235) съ конусомъ (237), вершина котораго лежитъ въ началѣ координатъ. Если

$$H_1 < H_2 < H_3\,, \quad (238)$$

то легко видѣть, что

$$\frac{1}{H_3} < \overline{OP}^2 < \frac{1}{H_1}\,, \qquad H_3 > \frac{1}{\overline{OP}^2} > H_1 \quad (239)$$

т. е. что длина OP лежитъ между величинами наибольшей и наименьшей полуосей эллипсоида инерціи. Дѣйствительно, написавъ два урр. (222) и (223):

$$\begin{aligned} M^2 &= H_1^2p^2+H_2^2q^2+H_3^2r^2,\\ 2T &= H_1p^2+H_2q_2+H_3r^2, \end{aligned} \quad (260)$$

мы выведемъ изъ нихъ:

$$\begin{aligned} H_2(H_2-H_1)q^2+H_3(H_3-H_1)r^2 &= M^2-2TH_1\,,\\ H_1(H_3-H_1)p^2+H_2(H_3-H_2)q^2 &= 2TH_3-M^2\,, \end{aligned} \quad (241)$$

откуда, на основаніи неравенствъ (238), заключаемъ, что такъ какъ лѣвыя части должны быть положительными, то необходимо будетъ

$$2TH_3 > M^2 > 2TH_1\,,$$

или (242)

$$\frac{1}{H_3} < \frac{2T}{M^2} < \frac{1}{H_1}\,,$$

откуда, на основаніи (232), слѣдуетъ неравенство (239). Такимъ образомъ мы видимъ, что въ ур. (237), представляющемъ подвижный конусъ осей, первый коеффиціентъ всегда отрицательный, а послѣдній положительный; средній-же можетъ вообще быть и положительнымъ, и отрицательнымъ.

Если

$$\overline{OP}^2 > \frac{1}{H_2}\,, \quad \text{то} \quad H_2-\frac{1}{\overline{OP}^2} > 0, \quad (243)$$

и ур. (237) представляетъ нѣкоторый конусъ, охватывающій ось x-овъ, т. е. большую полуось эллипсоида инерціи, въ чемъ легко убѣдиться, ища пересѣченіе конуса съ какою нибудь плоскостію, $x = a$, перпендикулярною къ оси x-овъ; дѣлая въ уравненіи (237) $x = a$, мы получаемъ между координатами y и z уравненіе эллипсиса, центръ котораго лежитъ на оси x-овъ, а полуоси параллельны осямъ y-овъ и z-овъ. Такого рода полодія представится на (рис. 77) одною изъ кривыхъ α', α'', α''', при чемъ другой конецъ діаметра опишетъ одну изъ такихъ-же кривыхъ въ противоположномъ направленіи, на противоположной сторонѣ эллипсоида инерціи.

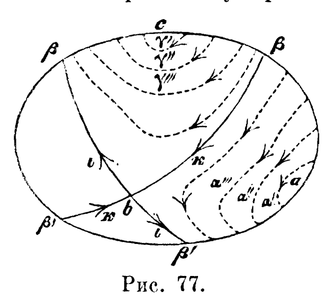


Рис. 77.

Если

$$\overline{OP}^2 < \frac{1}{H_2}, \quad \text{то} \quad H^2 - \frac{1}{\overline{OP}^2} < 0, \tag{244}$$

и ур. (237) представитъ конусъ, охватывающій ось z-овъ, т. е. меньшую полуось эллипсоида инерціи. Полодіею будетъ въ такомъ случаѣ одна изъ кривыхъ γ', γ'', γ'''.

Если

$$\overline{OP}^2 = \frac{1}{H_2}, \quad \text{то} \quad H_2 - \frac{1}{\overline{OP}^2} = 0, \tag{245}$$

и ур. (237), обращаясь въ

$$\left[z\sqrt{H_3(H_3 - H_2)} + x\sqrt{H_1(H_2 - H_1)}\right] \times \left[z\sqrt{H_3(H_3 - H_2)} - x\sqrt{H_1(H_2 - H_1)}\right] = 0, \tag{246}$$

представитъ двѣ пересѣкающіяся по оси y-овъ плоскости, которыхъ пересѣченіе съ эллипсоидомъ даетъ два эллипсиса β и β'. Въ такомъ случаѣ конецъ оси вращенія описываетъ или кривую $\beta b \beta$, или кривую $\beta' b \beta'$.

Наконецъ, если въ случаѣ (243) кромѣ того $\frac{1}{\overline{OP}^2} = H_1$, то ур. (237) обращается въ

$$H_2(H_2 - H)y^2 + H_3(H_3 - H_1)z^2 = 0, \tag{247}$$

которое можетъ только удовлетворяться величинами

$$y = 0 \quad \text{и} \quad z = 0,$$

и слѣдовательно представитъ ось x-овъ. Въ такомъ случаѣ полодія обращается въ одну точку—конецъ большей оси эллипсоида инерціи, которая и будетъ неизмѣнною осью вращенія. Если въ случаѣ (244) кромѣ того $\frac{1}{\overline{OP}_2} = H_3$, то легко видѣть также, что конусъ (237) обращается въ

$$H_1(H_3 - H_1)x^2 + H_2(H_3 - H_2)y^2 = 0\,. \tag{248}$$

представляя ось z-овъ. Въ такомъ случаѣ полодія опять обращается въ точку, и неизмѣнною осью вращенія дѣлается меньшая полуось эллипсоида.

Если два какіе нибудь изъ трехъ главныхъ моментовъ инерціи тѣла равны между собою, то эллипсоидъ инерціи превращается въ эллипсоидъ вращенія около большой или малой оси; катящійся конусъ дѣлается круглымъ и охватываетъ ось симметріи фигуры; полодіи представятся параллельными кругами вокругъ оси симметріи, и эллипсисы β, β' сольются въ одинъ экваторіальный кругъ. Если всѣ моменты инерціи равны между собою, то, по (224), всегда $\cos(\mathrm{M},\omega) = \pm 1$, и всякій діаметръ шара инерціи можетъ быть неизмѣнною осью вращенія; полодія тогда обращается всякій разъ въ точку, соотвѣтствующую концу данной оси вращенія.

Вращеніе около неизмѣнной оси, которая должна совпадать съ одною изъ осей инерціи, можетъ быть устойчивымъ или неустойчивымъ, какъ это легко можно заключить изъ формы полодій. Дѣйствительно, если тѣло вращается по инерціи около большей или меньшей изъ осей инерціи и какая нибудь причина отклонитъ весьма мало угловую скорость отъ этихъ направленій, предоставивъ затѣмъ тѣлу снова вращаться по инерціи, то при новомъ вращеніи конецъ отклоненной оси можетъ описывать весьма малыя замкнутыя полодіи α или γ вокругъ прежняго положенія оси вращенія, и дальнѣйшее отклоненіе оси вращенія отъ первоначальнаго ея направленія очевидно не превыситъ нѣкотораго весьма малаго угла. Но если ось вращенія будетъ отклонена весьма мало отъ ея совпаденія со среднею осью инерціи, то только изъ положеній k,k она можетъ (рис. 77) возвратиться опять къ совпаденію съ этою осью инерціи; изъ положеній i,i, она будетъ отъ него удаляться болѣе и болѣе, пока не совпадетъ съ осью инерціи въ противоположномъ направленіи; а изъ промежуточныхъ положеній, въ углахъ ibk и kbi, она начнетъ описывать расширенныя полодіи около большей или меньшей полуоси. Поэтому средняя ось инерціи называется неустойчивою свободною осью вра-

щенія, а большая и меньшая оси—устойчивыми свободными осями вращенія. Если всѣ оси инерціи равны, то всѣ онѣ устойчивы. Если двѣ оси инерціи равны между собою и эллипсоидъ инерціи представляется эллипсоидомъ вращенія, то легко видѣть, что ось симметріи будетъ устойчивою осью, а оси ей перпендикулярныя, хотя и будутъ всѣ свободными осями, но неустойчивыми.

§ 48. Измѣненіе движенія свободнаго твердаго тѣла.

Дѣйствіе приложенныхъ силъ на свободное твердое тѣло состоитъ въ измѣненіи движенія его центра инерціи и въ измѣненіи момента количества движенія около его центра инерціи, т. е. въ измѣненіи того вращенія около центра инерціи, которое имѣло-бы мѣсто, если-бы твердое тѣло двигалось по инерціи. Вслѣдствіе неизмѣняемости взаимнаго положенія матеріальныхъ точекъ, составляющихъ идеальное твердое тѣло, упомянутыя измѣненія будутъ единственныя, какія приложенныя силы могутъ произвести, ибо части приложенныхъ силъ, направленныя по взаимнымъ разстояніямъ точекъ неизмѣняемой системы будутъ, вслѣдствіе условій неизмѣняемости, взаимно уравновѣшены во все время движенія.

Измѣненіе движенія центра инерціи происходитъ такимъ образомъ, какъ если-бы сила, равная геометрической суммѣ всѣхъ приложенныхъ силъ, дѣйствовала-бы на матеріальную точку, съ массою равною массѣ всего даннаго твердаго тѣла (см. § 31). Слѣдовательно, если всѣ данныя силы приложены непосредственно къ центру инерціи твердаго тѣла, то онѣ обусловятъ только измѣненіе движенія этого центра, не имѣя вліянія на вращеніе. Въ такомъ случаѣ моментъ приложенныхъ силъ около центра инерціи будетъ нуль. Въ противномъ случаѣ рядомъ съ упомянутымъ измѣненіемъ произойдетъ и измѣненіе вращенія. Это послѣднее характеризуется измѣненіемъ момента количествъ движенія системы около движущагося центра инерціи, и измѣряется моментомъ приложенныхъ силъ около той-же точки.

Движеніе центра инерціи твердаго тѣла совершается по законамъ, изложеннымъ въ предыдущихъ главахъ, какъ движеніе матеріальной точки, и независимо отъ того, принадлежитъ-ли этотъ центръ

инерціи твердому тѣлу, или какой-либо иной системѣ матеріальныхъ точекъ.

Чтобы легче представить себѣ измѣненіе вращательнаго движенія, разсмотримъ сначала дѣйствіе на твердое тѣло силъ мгновенныхъ. Это дѣйствіе будетъ вполнѣ опредѣлено, если даны по величинѣ и направленію геометрическая сумма импульсовъ, приложенныхъ къ разнымъ точкамъ твердаго тѣла, и геометрическая сумма моментовъ этихъ импульсовъ. Послѣдняя изъ упомянутыхъ величинъ обусловитъ измѣненіе вращательнаго движенія, а именно будетъ равна по величинѣ и направленію приращенію геометрической суммы моментовъ количества движенія точекъ твердаго тѣла, т. е. приращенію величины, опредѣленной въ предыдущемъ параграфѣ слагающими $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Слѣдовательно, если L, M, N будутъ представлять слагающія по главнымъ осямъ инерціи момента импульсовъ, а $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}$, и т. д.— соотвѣтствующія величины до дѣйствія импульсовъ и послѣ онаго, то (сравн. § 31):

$$L = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}_0, \quad M = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0, \quad N = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}_0. \tag{249}$$

Если тѣло первоначально въ покоѣ, то очевидно:

$$\mathfrak{L} = L, \quad \mathfrak{M} = M, \quad \mathfrak{N} = N, \tag{250}$$

и, на основаніи предыдущаго параграфа, мы можемъ непосредственно представить себѣ движеніе, сообщенное тѣлу даннымъ моментомъ импульса. Дѣйствительно, если даны направленіе и величина момента импульса, то урр. (250) и (220) сейчасъ-же даютъ положеніе мгновенной оси вращенія и величину скорости вращенія. Геометрическое построеніе, опредѣляющее положеніе мгновенной оси вращенія, очевидно будетъ состоять въ томъ, что, проведя черезъ центръ инерціи прямую въ направленіи даннаго момента импульса, мы построимъ касательную плоскость къ центральному эллипсоиду инерціи даннаго тѣла такъ, чтобы эта плоскость была перпендикулярна къ упомянутой прямой; тогда діаметръ эллипсоида, проходящій черезъ точку касанія, совпадетъ съ мгновенною осью. Что касается до угловой скорости ω, то, на основаніи (227):

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{H}}, \tag{251}$$

гдѣ H есть моментъ инерціи около оси вращенія, или по (229):

$$\omega = \overline{OH}\sqrt{2T}, \tag{252}$$

гдѣ $\overline{OH}$ есть длина полудіаметра эллипсоида инерціи черезъ точку касанія, и $\sqrt{2T}$, тоже на основаніи (232), получается изъ построенія такъ, что (рис. 76)

$$\sqrt{2T} = \overline{OP} \,.\, M. \tag{253}$$

Дальнѣйшее движеніе совершается по инерціи, какъ описано въ предъидущемъ параграфѣ; т. е. эллипсоидъ инерціи, при неизмѣнномъ разстояніи своего центра отъ упомянутой выше плоскости, касается ея постоянно точками соотвѣтствующей полодіи.

Если твердое тѣло обладаетъ уже нѣкоторымъ вращательнымъ движеніемъ въ моментъ дѣйствія импульса, то мы должны очевидно прежде всего построить геометрическую сумму моментовъ, первоначальнаго $(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ и прибавочнаго (L, M, N). Направленіе найденной суммы должно быть перпендикулярно къ плоскости касанія эллипсоида инерціи. Затѣмъ, для нахожденія величины и направленія мгновенной угловой скорости, тотчасъ послѣ дѣйствія импульса, повторяемъ предыдущее построеніе, при чемъ уже очевидно:

$$M^2 = (\mathfrak{L}_0 + L)^2 + (\mathfrak{M}_0 + M)^2 + (\mathfrak{N}_0 + N)^2. \tag{254}$$

Иначе, мы можемъ сдѣлать отдѣльно два построенія для момента $(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ и момента (L, M, N), и затѣмъ сложить геометрически найденныя угловыя скорости, представленныя прямыми линіями, сообразно съ § 13. Дѣйствительно, обозначая черезъ $p_0, p', p \ldots$ и т. п. слагающія по главнымъ осямъ инерціи (при одномъ и томъ-же ихъ положеніи въ пространствѣ) угловыхъ скоростей, соотвѣтствующихъ моментамъ

$$(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}), \quad (L, M, N), \quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}),$$

мы, на основаніи (220), находимъ, что

$$\mathfrak{L}_0 = p_0 H_1, \quad L = p' H_1, \quad \mathfrak{L} = p H_1 \quad \text{и т. д.;}$$

а такъ какъ

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + L,$$

то

$$p = p_0 + p', \quad q = q_0 + q', \quad r = r_0 + r', \tag{255}$$

откуда и заключаемъ, что угловая скорость (p, q, r) есть геометрическая сумма скоростей (p_0, q_0, r_0) и (p', q', r').

Если мы представимъ себѣ импульсы безконечно малыми по величинѣ и повторяющимися черезъ безконечно малые промежутки вре-

мени, то мы перейдемъ къ случаю непрерывно дѣйствующихъ силъ и непрерывнаго измѣненія движенія твердаго тѣла. При этомъ моментъ количества движенія М остается неизмѣннымъ по величинѣ и направленію только въ теченіи элемента времени dt, и слѣдовательно, только въ продолженіи времени dt эллипсоидъ инерціи соприкасается съ неизмѣнною плоскостію, а конецъ оси вращенія перемѣщается по соотвѣтствующей полодіи. Для слѣдующаго элемента времени плоскость соприкосновенія и полодія будутъ другія.

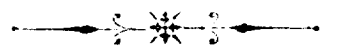
Пустъ L, M, N будутъ слагающіе моменты приложенныхъ силъ а $d\mathfrak{L}$, $d\mathfrak{M}$, $d\mathfrak{N}$—безконечно малыя приращенія слагающихъ моментовъ количества движенія. Тогда

$$d\mathfrak{L} = Ldt\,, \qquad d\mathfrak{M} = Mdt\,, \qquad d\mathfrak{N} = Ndt\,, \tag{256}$$

и если dp, dq, dr будутъ обозначать приращенія слагающихъ угловыхъ скоростей, то очевидно:

$$H_1 dp = Ldt\,, \qquad H_2 dq = Mdt\,, \qquad H_3 dr = Ndt\,, \tag{257}$$

при чемъ dp, dq, dr суть такія приращенія слагающихъ угловыхъ скоростей, какія имѣютъ мѣсто независимо отъ приращеній тѣхъ-же величинъ, существующихъ вслѣдствіе продолжающагося движенія по инерціи; слѣдовательно, полныя приращенія получатся, какъ сумма первыхъ и послѣднихъ. Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность вычислить повороты даннаго твердаго тѣла для каждаго безконечно малаго элемента времени, и, зная способы суммованія безчисленнаго множества безконечно малыхъ перемѣщеній, съумѣемъ найти повороты, происходящіе въ теченіи конечныхъ промежутковъ времени.



Если ΔМ будетъ обозначать геометрическое приращеніе момента М въ теченіи элемента времени dt, а M будетъ величина момента приложенныхъ силъ, обусловливающихъ упомянутое приращеніе, то, какъ извѣстно, направленія ΔМ и M совпадаютъ другъ съ другомъ, и кромѣ того:

$$\Delta \mathrm{M} = \mathsf{M} dt\,. \tag{258}$$

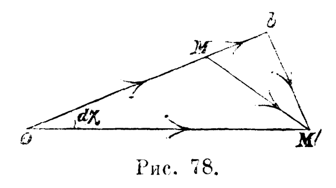


Рис. 78.

Пусть $\overline{OM}$ представляетъ (рис. 78) величину М и $\overline{MM'}$—величину ΔМ; тогда OM' представитъ геометрическую сумму М + ΔМ. Но моментъ ΔМ мы можемъ тоже представить, какъ геометрическую сум-

му двухъ моментовъ $\overline{Mb}$ и $\overline{bM'}$, изъ которыхъ первый, совпадая съ $\overline{OM}$, обусловливаетъ только измѣненіе величины этого послѣдняго и можетъ быть разсматриваемъ, какъ безконечно малое алгебраическое приращеніе dM момента M. Безконечно малый моментъ $\overline{bM'}$, прилагаясь перпендикулярно къ M, измѣняетъ направленіе его на уголъ $d\chi$. Такъ какъ по безконечной малости $\overline{bM'}$ мы можемъ принять эту линію за дугу круга, описаннаго радіусомъ OM или OM', то заключаемъ, что

$$\overline{bM'} = \mathrm{M}d\chi \qquad (259)$$

и что прибавленіе момента $\mathrm{M}d\chi$ измѣняетъ только направленіе момента M, не имѣя вліянія на его величину. Такимъ образомъ мы находимъ, что

$$\Delta\mathrm{M} = d\mathrm{M} + \mathrm{M}d\chi\,. \qquad (260)$$

Слагающія момента M, направленныя по $\overline{Mb}$ и $\overline{bM'}$ будутъ очевидно

$$\mathsf{M}\cos\theta \quad \text{и} \quad \mathsf{M}\sin\theta\,,$$

гдѣ θ есть уголъ между M и M. Слѣдовательно:

$$d\mathrm{M} = \mathsf{M}\cos\theta\, dt \quad \text{и} \quad \mathrm{M}d\chi = \mathsf{M}\sin\theta\, dt. \qquad (261)$$

Послѣднее уравненіе показываетъ также, что уголъ $d\chi$ поворота момента будетъ, при однѣхъ и тѣхъ-же силахъ, тѣмъ меньше, чѣмъ больше вращаемый моментъ M.

Относительное положеніе момента M и оси вращенія опредѣляется касательною плоскостію эллипсоида инерціи, къ которой M перпендикулярно, при чемъ ось вращенія проходитъ черезъ точку касанія. Если слѣдовательно направленіе момента не измѣняется, то относительное положеніе оси вращенія остается одно и тоже для каждаго соприкосновенія эллипсоида инерціи съ неизмѣнною плоскостію, какъ въ случаѣ вращенія по инерціи. Но угловая скорость вращенія будетъ уже другая, а слѣдовательно и движеніе оси вращенія въ пространствѣ—тоже другое. Такъ какъ размѣры и форма полодіи, по ур. (237), опредѣляются величиною $\overline{OP}$, т. е. длиною перпендикуляра изъ центра инерціи на неизмѣнную касательную плоскость, то въ данномъ случаѣ, при одномъ только измѣненіи величины M, когда длина $\overline{OP}$ остается неизмѣнною, конецъ оси вращенія будетъ описывать на поверхности эллипсоида инерціи туже кривую, какъ въ

случаѣ движенія по инерціи; но скорость движенія полюса по упомянутой поверхности будетъ иная, вслѣдствіе измѣненія угловой скорости вращенія; слѣдовательно, полодія будетъ совпадать послѣдовательно съ неизмѣнной касательной плоскостію въ иныхъ точкахъ, нежели въ случаѣ движенія по инерціи; т. е. эрполодія не останется одна и таже.

Что касается до алгебраическаго безконечно малаго приращенія $d\omega$ величины угловой скорости, соотвѣтствующаго приращенію $d\mathrm{M}$ момента, то мы найдемъ непосредственно изъ $(227)'$:

$$dT = \omega\, d\omega\, H\,, \tag{262}$$

гдѣ dT есть соотвѣтствующее приращеніе кинетической энергіи, а H—моментъ инерціи около оси вращенія, который не измѣняется при увеличеніи момента M, вслѣдствіе того, что углы $(d\mathrm{M}, d\omega)$ и (M, ω) одинаковы. При этомъ $d\omega$ обозначаетъ опять излишекъ приращенія величины ω противъ того приращенія, которое имѣло-бы мѣсто при продолжающемся движеніи по инерціи. Съ другой стороны, приращеніе кинетической энергіи dT, на основаніи § 33, равно работѣ, произведенной въ соотвѣтствующій промежутокъ времени приложенными силами, или въ нашемъ случаѣ—парою $\mathsf{M}\cos\theta$. Если L, M, N суть слагающія по осямъ координатъ нѣкотораго момента силъ $\mathfrak{M}$, то, по § 39, работа силъ, опредѣленныхъ упомянутымъ моментомъ, при безконечно малыхъ вращеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ твердаго тѣла около осей координатъ, будетъ

$$Ld\alpha + Md\beta + Nd\gamma\,, \tag{263}$$

или такъ какъ, въ случаѣ движенія въ теченіи времени dt съ угловыми скоростями p, q, r, очевидно

$$d\alpha = pdt\,, \qquad d\beta = qdt\,, \qquad d\gamma = rdt\,,$$

то приращеніе кинетической энергіи dT, обусловленное работой (263), будетъ

$$dT = (Lp + Mq + Nr)\,dt\,; \tag{264}$$

но легко видѣть, что

$$Lp + Mq + Nr = \omega\mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, \omega)\,,$$

вслѣдствіе чего вообще

$$dT = \omega\,\mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, \omega)\,dt\,. \tag{265}$$

Прилагая предыдущій выводъ къ разсматриваемому нами случаю, гдѣ очевидно

$$\mathcal{M}dt = \mathsf{M}\cos\theta dt = d\mathrm{M}\,, \tag{266}$$

и

$$\cos(\mathcal{M},\omega) = \cos(\mathrm{M}.\omega)\,,$$

мы находимъ, что

$$dT = \omega\cos.(\mathrm{M},\omega)\,d\mathrm{M}\,. \tag{267}$$

Сравнивая это выраженіе съ (262), находимъ:

$$d\omega = \cos(\mathrm{M},\omega)\frac{d\mathrm{M}}{H}\,, \tag{268}$$

или, на основаніи (227) и (228):

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,. \tag{269}$$

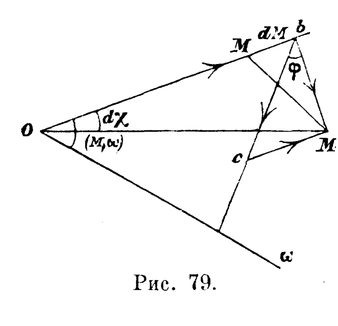


Рис. 79.

Слагающій моментъ bM' (рис. 79) приращенія $\Delta\mathrm{M}$, измѣняющій только направленіе момента M на уголъ $d\chi$, разобьемъ опять на два момента: $\overline{bc}$, лежащій въ плоскости момента M и оси ω, и $\overline{cM'}$, перпендикулярный къ упомянутой плоскости. Если φ будетъ уголъ между MM' и плоскостію угла (M,ω), то

$$\overline{bC} = \overline{MM'}\cos\varphi \quad \text{и} \quad \overline{cM'} = \overline{MM'}\sin\varphi\,, \tag{270}$$

и, на основаніи (259):

$$\overline{bc} = \mathrm{M}\cos\varphi\, d\chi\,, \quad \overline{cM'} = \mathrm{M}\sin\varphi\, d\chi\,. \tag{280}$$

Такъ какъ уголъ между направленіемъ момента $\overline{cM'}$ и осью вращенія по условію прямой, то, на основаніи (265), заключаемъ, что работа соотвѣтствующихъ силъ равна нулю, и что кинетическая энергія даннаго твердаго тѣла не измѣняется, если моментъ приложенной пары всегда перпендикуляренъ къ плоскости оси вращенія и момента количества движенія. Но если величины M и T во время разсматриваемаго движенія останутся постоянными, то, на основаніи (232), не должна также измѣняться длина перпендикуляра OP изъ центра инерціи на касательную плоскость, проходящую черезъ конецъ оси вращенія. Слѣдовательно, полоида, опредѣляемая урр. (235) и (237),

останется таже, какъ для случая движенія по инерціи; т. е. эллипсоидъ инерціи будетъ прикасаться къ подвижной плоскости тѣми-же своими точками, какими онъ прикасался-бы къ неподвижной, и касательная плоскость будетъ перемѣщаться въ пространствѣ вмѣстѣ съ эллипсоидомъ инерціи такимъ образомъ, что движеніе этого послѣдняго относительно плоскости останется тѣмъ-же, какъ въ случаѣ движенія по инерціи; но положеніе эллипсоида инерціи въ пространствѣ будетъ очевидно измѣнятся иначе.

Наконецъ, приращеніе энергіи, обусловливаемое слагающимъ моментомъ $\overline{bc}$, будетъ

$$dT = \omega \cos(\overline{bc},\omega) \,.\, \overline{bc}\,,$$

или, такъ какъ

$$\cos(\overline{bc},\omega) = \sin(\mathbf{M},\omega):$$

$$dT = \omega \,.\, \sin(\mathbf{M},\omega) \,.\, \mathbf{M} \cos\varphi \quad d\chi\,. \tag{281}$$

Длина перпендикуляра OP при этомъ тоже измѣняется, и слѣдовательно, измѣняется та кривая, которую полюсъ приращеніе описываетъ на поверхности эллипсоида инерціи. Называя приращеніе длины $\overline{OP}$ черезъ $d\overline{OP}$, мы легко найдемъ изъ ур. (232), что

$$\overline{OP} \,.\, d\,\overline{OP} = \frac{dT}{\mathbf{M}^2} = \frac{\omega \sin(\mathbf{M},\omega)}{\mathbf{M}} \cos\varphi \,.\, d\chi\,, \tag{282}$$

или такъ какъ, по (252) и (253),

$$\omega = \overline{OH} \,.\, \overline{\mathrm{OP}} \,.\, \mathbf{M}$$

и такъ какъ (рис. 76)

$$\overline{OH} \sin(\mathbf{M},\omega) = \overline{PH}\,,$$

то

$$d\,\overline{\mathrm{OP}} = \overline{PH} \,.\, \cos\varphi\, d\chi\,. \tag{283}$$

Полное приращеніе кинетической энергіи вращенія, обусловливаемое приращеніемъ момента $\Delta\mathbf{M}$, будетъ равно суммѣ приращеній (267) и (281), т. е.

$$dT = \omega \cos(\mathbf{M},\omega)\, d\mathbf{M} + \omega \,.\, \sin(\mathbf{M},\omega) \,.\, \mathbf{M} \cos\varphi \,.\, d\chi\,, \tag{284}$$

или вообще въ другомъ видѣ, на основаніи (265):

$$dT = \omega \cos(\Delta\mathbf{M},\omega)\, \Delta\mathbf{M}\,, \tag{284}$$

причемъ очевидно, кинетическая энергія не измѣняется, если приращеніе **ΔM** перпендикулярно къ оси вращенія.

§ 49. Общія уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла.

Мы видѣли въ § 30, (93), что уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ получаются изъ условія равновѣсія потерянныхъ силъ. Слѣдовательно, вводя въ уравненія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла ((15), § 39) на мѣсто слагающихъ X, Y, Z приложенныхъ силъ слагающія

$$X - mg_x, \quad Y - mg_y, \quad Z - mg_z$$

потерянныхъ силъ, гдѣ g_x, g_y, g_z обозначаютъ слагающія ускоренія соотвѣтствующей точки твердаго тѣла, а m—массу этой точки, мы получимъ слѣдующія уравненія движенія:

$$\Sigma X = \Sigma m g_x, \quad \Sigma Y = \Sigma m g_y, \quad \Sigma Z = \Sigma m g_z \tag{285}$$

$$\begin{aligned} \Sigma(Yz - Zy) &= \Sigma m(g_y z - g_z y), \\ \Sigma(Zx - Xz) &= \Sigma m(g_z x - g_x z), \\ \Sigma(Xy - Yx) &= \Sigma m(g_x y - g_y x), \end{aligned} \tag{286}$$

гдѣ алгебраическія суммы берутся по всѣмъ приложеннымъ силамъ, съ одной стороны, и по всѣмъ точкамъ системы—съ другой. Но выраженія (88) (§ 14) намъ даютъ:

$$\begin{aligned} g_x &= j_x + y\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt} + (px + qy + rz)p - \omega^2 x, \\ g_y &= j_y + z\frac{dp}{dt} - x\frac{dr}{dt} + (px + qy + rz)q - \omega^2 y, \\ g_z &= j_z + x\frac{dq}{dt} - y\frac{dp}{dt} + (px + qy + rz)r - \omega^2 z, \end{aligned} \tag{287}$$

гдѣ j_x, j_y, j_z суть ускоренія поступательнаго движенія; разности, зависящія отъ угловыхъ ускореній $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$, суть слагающія тангенціальныя ускоренія вращательнаго движенія, и наконецъ остальные члены, зависящіе отъ угловыхъ скоростей—слагающія центростремительныхъ ускореній. Подставимъ теперь выраженія (287) въ (285) и (286); введемъ обозначенія L, M, N, A, B, C ((11), § 40); оси координатъ выберемъ, какъ въ § 45, т. е. неизмѣнно связанными

съ тѣломъ и совпадающими съ его главными центральными осями инерціи. Тогда, помня что суммы

$$\Sigma myz\,,\quad \Sigma mzx\,,\quad \Sigma mxy\,,\quad \Sigma mx\,,\quad \Sigma my\,,\quad \Sigma mz\,,$$

при такомъ выборѣ осей координатъ равны нулю, мы получаемъ изъ (285):

$$A = j_x \Sigma m\,,\qquad B = j_y \Sigma m\,,\qquad C = j_z \Sigma m\,, \tag{288}$$

гдѣ j_x, j_y, j_z представляютъ очевидно также ускоренія центра инерціи системы. Точно также урр. (286) дадутъ:

$$L = H_1 \frac{dp}{dt} + qr(\Sigma mz^2 - \Sigma my^2)\,, \quad \text{и т. д.}\,,$$

Прибавляя и вычитая въ скобкахъ правыхъ частей каждаго изъ уравненій, подобныхъ этому послѣднему, соотвѣтственно Σmx^2, Σmy^2, Σmz^2, и помня значенія H_1, H_2, H_3 (§ 46), мы получаемъ:

$$\begin{aligned} L &= H_1 \frac{dp}{dt} + qr(H_2 - H_3)\,, \\ M &= H_2 \frac{dq}{dt} + rp(H_3 - H_1)\,, \\ N &= H_3 \frac{dr}{dt} + pq(H_1 - H_2)\,. \end{aligned} \tag{289}$$

Уравненія (288) выражаютъ то прежде уже неоднократно указанное свойство движенія, что геометрическая сумма приложенныхъ силъ измѣняетъ движеніе центра инерціи, какъ движеніе свободной матеріальной точки, въ которой сосредоточена вся масса системы.

Уравненія (289) называются эйлеровыми уравненіями, и опредѣляютъ измѣненіе вращательнаго движенія около центра инерціи. Интегральное исчисленіе учитъ насъ, какъ на основаніи урр. (288), (289) вполнѣ опредѣлять движеніе твердаго тѣла въ томъ видѣ, какъ было указано въ § 15, причемъ заключенія § 47 и § 48 являются частными слѣдствіями рѣшенія этихъ уравненій. Сообразно принятому нами плану изложенія, мы ограничимся здѣсь нѣкоторыми непосредственными выводами изъ неразрѣшенныхъ урр. (289).

Первые члены лѣвыхъ частей урр. (289), т. е.

$$H_1 \frac{dp}{dt}\,,\qquad H_2 \frac{dq}{dt}\,,\qquad H_3 \frac{dr}{dt}\,, \tag{290}$$

представляютъ очевидно слагающія по осямъ координатъ момента

ускорительныхъ тангенціальныхъ силъ; вторые члены, т. е.

$$qr(H_2 - H_3)\,, \quad rp(H_3 - H_1)\,, \quad pq(H_1 - H_2)\,, \tag{291}$$

или иначе на основаніи (220):

$$r\mathfrak{M} - q\mathfrak{N}\,, \quad p\mathfrak{N} - r\mathfrak{L}\,, \quad q\mathfrak{L} - p\mathfrak{M}\,, \tag{291$'$}$$

представляютъ слагающіе моменты центростремительныхъ силъ. Обозначая величины (291)' черезъ λ, μ, ν, мы легко найдемъ, производя сложеніе нижеслѣдующихъ произведеній, что

$$\begin{aligned} \lambda p + \mu q + \nu r &= 0\,, \\ \lambda\mathfrak{L} + \mu\mathfrak{M} + \nu\mathfrak{N} &= 0\,, \end{aligned} \tag{292}$$

откуда заключаемъ, что моментъ (λ, μ, ν) перпендикуляренъ къ оси вращенія и къ моменту $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ количества движенія. Квадратъ величины момента (λ, μ, ν) будетъ очевидно

$$\begin{gathered} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \\ (r\mathfrak{M} - q\mathfrak{N})^2 + (p\mathfrak{N} - r\mathfrak{L})^2 + (q\mathfrak{L} - p\mathfrak{M})^2 \\ = \mathfrak{L}^2(q^2 + r^2) + \mathfrak{M}^2(r^2 + p^2) + \mathfrak{N}^2(p^2 + q^2) \\ - 2\mathfrak{M}\mathfrak{N}qr - 2\mathfrak{N}\mathfrak{L}rp - 2\mathfrak{L}\mathfrak{M}pq\,; \end{gathered}$$

прибавляя и вычитая сумму

$$\mathfrak{L}^2 r^2 + \mathfrak{M}^2 q^2 + \mathfrak{N}^2 r^2,$$

и помня, что

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2\,,$$

получаемъ:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \\ &= \omega^2(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2) - (\mathfrak{L}p + \mathfrak{M}q + \mathfrak{N}r)^2 \\ &= \omega^2 \mathrm{M}^2 - \mathrm{M}^2\omega^2 \cos^2(\mathrm{M},\omega) = \mathrm{M}^2\omega^2 \,.\, \sin^2(\mathrm{M},\omega)\,, \end{aligned} \tag{293}$$

откуда видимъ, что откладывая длину M въ направленіи момента количества движенія и длину ω—въ направленіи оси вращенія, мы получимъ величину момента центростремительныхъ силъ, какъ величину площади параллелограмма, построеннаго на упомянутыхъ двухъ линіяхъ, какъ сторонахъ.

Умножая урр. (289) соотвѣтственно на pdt, qdt, rdt и складывая, мы получимъ выраженія для работы, произведенной системою приложенныхъ силъ (L, M, N) въ теченіи времени dt, и равной при-

ращенію кинетической энергіи вращательнаго движенія; т. е. мы будемъ имѣть:

$$dT = Lpdt + Mqdt + Nrdt =$$
$$= H_1 pdp + H_2 qdq + H_3 rdr + (\lambda p + \mu q + \nu r)\,dt\,. \qquad (294)$$

Величина

$$H_1 pdp + H_2 qdq + H_3 rdr \qquad (295)$$

представляетъ здѣсь очевидно работу тангенціальныхъ ускорительныхъ силъ, совпадающихъ въ каждой точкѣ съ направленіемъ скорости; а величина

$$(\lambda p + \mu q + \nu r)\,dt \qquad (296)$$

представляетъ работу центростремительныхъ силъ, которая, на основаніи (292), всегда равна нулю. Слѣдовательно, центростремительныя силы только имѣютъ вліяніе на измѣненіе момента количества движенія, не измѣняя кинетической энергіи.

Помня, что (§ 31):

$$Ldt = d\mathfrak{L}\,, \qquad Mdt = d\mathfrak{M}\,, \qquad Ndt = d\mathfrak{N}\,, \qquad (297)$$

мы можемъ представить урр. (289) въ такомъ видѣ:

$$d\mathfrak{L} = H_1 dp + \lambda dt\,,$$
$$d\mathfrak{M} = H_2 dq + \mu dt\,, \qquad (298)$$
$$d\mathfrak{N} = H_3 dr + \nu dt\,,$$

гдѣ dp, dq, dr суть полныя приращенія слагающихъ угловыхъ скоростей, обусловливаемыя измѣненіемъ момента M и продолжающимся движеніемъ по инерціи, т. е. прилагающимся постоянно моментомъ центростремительныхъ силъ. Такимъ образомъ, приращенія, входящія въ урр. (298), не должно смѣшивать съ тѣми, о которыхъ упоминается въ урр. (257).

Разсмотримъ теперь, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, различныя части приращенія момента M, направленныя a) вдоль по прежнему моменту M, b) перпендикулярно къ M и къ оси вращенія, и c) перпендикулярно къ M, въ плоскости (M,ω). Обозначимъ черезъ $\Delta_1 M$, $\Delta_2 M$, $\Delta_3 M$ три вышеупомянутыя слагающія части приращенія ΔM. Тогда сообразно обозначеніямъ предыдущаго параграфа, по (260), (280):

$$\Delta_1 M = dM\,, \qquad \Delta_2 M = M \sin\varphi\, d\chi\,, \qquad \Delta_3 M = M \cos\varphi\, d\chi \qquad (299)$$

и

$$\Delta M = \Delta_1 M + \Delta_2 M + \Delta_3 M \,. \tag{300}$$

Если мы далѣе обозначимъ соотвѣтственно черезъ $d_1\mathfrak{L}, d_2\mathfrak{M}\ldots, d_2\mathfrak{L}\ldots d_3\mathfrak{L}\ldots$ проложенія моментовъ $\Delta_1 M, \Delta_2 M, \Delta_3 M$ на оси координатъ, то очевидно:

$$\Delta_1 M = d_1\mathfrak{L} + d_1\mathfrak{M} + d_3\mathfrak{N}\,, \quad \text{и т. д} \tag{301}$$

и кромѣ того:

$$d\mathfrak{L} = d_1\mathfrak{L} + d_2\mathfrak{L} + d_3\mathfrak{L}\,, \quad d\mathfrak{M} = d_1\mathfrak{M} + d_2\mathfrak{M} + d_3\mathfrak{M}\,,$$
$$d\mathfrak{N} = d_1\mathfrak{N} + d_2\mathfrak{N} + d_3\mathfrak{N}\,. \tag{302}$$

Такъ какъ направленіе $\Delta_1 M$ по условію совпадаютъ съ M, то косинусы его угловъ съ осями координатъ будутъ

$$\frac{\mathfrak{L}}{M}, \quad \frac{\mathfrak{M}}{M}, \quad \frac{\mathfrak{N}}{M}.$$

Умножая уравненія (302) соотвѣтственно на вышеприведенныя величины косинусовъ, складывая, и замѣчая, что вслѣдствіе перпендикулярности $\Delta_1 M$ къ $\Delta_2 M$ и къ $\Delta_3 M$:

$$\frac{\mathfrak{L}}{M} d_2\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{M}}{M} d_2\mathfrak{M} + \frac{\mathfrak{N}}{M} d_2\mathfrak{N} = 0\,,$$
$$\frac{\mathfrak{L}}{M} d_3\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{M}}{M} d_3\mathfrak{M} + \frac{\mathfrak{N}}{M} d_3\mathfrak{N} = 0\,, \tag{303}$$

и что:

$$\frac{\mathfrak{L}}{M} \cdot \frac{d_1\mathfrak{L}}{\Delta_1 M} + \frac{\mathfrak{M}}{M} \cdot \frac{d_1\mathfrak{M}}{\Delta_1 M} + \frac{\mathfrak{M}}{M} \cdot \frac{d_1\mathfrak{M}}{\Delta_1 M} = \cos(M, \Delta_1 M) = 1\,, \tag{304}$$

мы получимъ:

$$d\mathfrak{L}\frac{\mathfrak{L}}{M} + d\mathfrak{M}\frac{\mathfrak{M}}{M} + d\mathfrak{N}\frac{\mathfrak{N}}{M} = \Delta_1 M\,; \tag{305}$$

подставляя сюда величины $d\mathfrak{L}, d\mathfrak{M}, d\mathfrak{N}$ изъ (298) и помня урр. (292), мы получимъ:

$$\Delta_1 M = \frac{1}{M}[\mathfrak{L}H_1 dp + \mathfrak{M}H_2 dq + \mathfrak{N}H_3 dr]\,,$$

или по (220): (306)

$$dM = \frac{1}{M}[H_1^2 p dp + H_2^2 q dq + H_3^2 r dr)\,.$$

Кромѣ того очевидно:

$$d_1\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathrm{M}} d\mathrm{M}\,, \qquad d_1\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{M}} d\mathrm{M}\,, \qquad d_1\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{M}} d\mathrm{M}\,. \tag{307}$$

Такъ какъ направленіе $\Delta_2\mathrm{M}$ совпадаетъ съ направленіемъ момента (λ, μ, ν), то обозначая

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \quad \text{черезъ} \quad \Omega^2, \tag{308}$$

мы будемъ имѣть соотвѣтственно слѣдующія величины для косинусовъ угловъ $\Delta_2\mathrm{M}$ съ осями координатъ:

$$\frac{\lambda}{\Omega}, \quad \frac{\mu}{\Omega}, \quad \frac{\nu}{\Omega}, \tag{309}$$

и слѣдовательно:

$$d_2\mathfrak{L} = \frac{\lambda}{\Omega}\Delta_2\mathrm{M}\,, \qquad d_2\mathfrak{M} = \frac{\mu}{\Omega}\Delta_2\mathrm{M}\,, \qquad d_2\mathfrak{N} = \frac{\nu}{\Omega}\Delta_2\mathrm{M}\,. \tag{310}$$

Самая-же величина момента $\Delta_2\mathrm{M}$ получится, если мы сложимъ урр. (302), соотвѣтственно умноженныя на косинусы (309), и обратимъ при этомъ вниманіе на то, что $\Delta_2\mathrm{M}$ перпендикулярно къ $\Delta_1\mathrm{M}$ и къ $\Delta_3\mathrm{M}$. Такимъ образомъ, мы получимъ подобно тому, какъ получили урр. (305):

$$\Delta_2\mathrm{M} = d\mathfrak{L}\frac{\lambda}{\Omega} + d\mathfrak{M}\frac{\mu}{\Omega} + d\mathfrak{N}\frac{\nu}{\Omega}\,, \tag{311}$$

или, на основаніи (298):

$$\Delta_2\mathrm{M} = \frac{1}{\Omega}\left[H_1\lambda dp + H_2\mu dq + H_3\nu dr\right] + \Omega dt\,. \tag{312}$$

Обозначая наконецъ черезъ l, m, n косинусы угловъ направленія $\Delta_3\mathrm{M}$ съ осями координатъ, мы опредѣлимъ эти величины изъ тѣхъ условій, что, вслѣдствіе перпендикулярности $\Delta_3\mathrm{M}$ къ $\Delta_1\mathrm{M}$ и къ $\Delta_2\mathrm{M}$,

$$\left.\begin{aligned} l\frac{\mathfrak{L}}{\mathrm{M}} + m\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{M}} + n\frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{M}} &= 0\,, \\ l\frac{\lambda}{\Omega} + m\frac{\mu}{\Omega} + n\frac{\nu}{\Omega} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{313}$$

и что

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1\,. \tag{314}$$

Изъ этихъ уравненій, обращая вниманіе на второе изъ условій (292),

мы получимъ:

$$l = \pm \frac{\mathfrak{M}\nu - \mathfrak{N}\mu}{M\Omega}, \quad m = \pm \frac{\mathfrak{N}\lambda - \mathfrak{L}\nu}{M\Omega}, \quad n = \pm \frac{\mathfrak{L}\mu - \mathfrak{M}\lambda}{M\Omega}, \tag{315}$$

гдѣ выборъ знака $\pm$ зависитъ отъ того, въ какую сторону вдоль по линіи перпердикулярной къ плоскости $(\Delta_1 M, \Delta M)$, мы считаемъ положительное направленіе. Опредѣливши l, m, n, мы получимъ далѣе, какъ прежде:

$$d_3\mathfrak{L} = l\Delta_3 M, \quad d_3\mathfrak{M} = m\Delta_3 M, \quad d_3\mathfrak{N} = n\Delta_3 M, \tag{316}$$

и изъ урр. (302):

$$\Delta_3 M = lH_1 dp + mH_2 dq + nH_3 dr. \tag{317}$$

Приращеніе угловой скорости, по величинѣ и направленію, обусловленное приращеніемъ ΔM, обозначимъ черезъ $\Delta\omega$, и представимъ какъ геометрическую сумму

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= d\omega + \omega d\varepsilon, \\ \Delta\omega^2 &= d\omega^2 + \omega^2 d\varepsilon^2, \end{aligned} \tag{318}$$

гдѣ $d\omega$ обозначаетъ алгебраическое приращеніе угловой скорости около прежней оси, а $\omega d\varepsilon$—скорость около оси, перпендикулярной къ прежней, которая, прилагаясь къ этой послѣдней, вращаетъ старую ось на уголъ $d\varepsilon$, причемъ $d\omega$ и $\omega d\varepsilon$ перпендикулярны другъ къ другу. Проложенія $\Delta\omega$ на оси координатъ будутъ очевидно dp, dq, dr, которыя на основаніи (298) опредѣлятся, какъ

$$dp = \frac{d\mathfrak{L}}{H_1} - \frac{\lambda}{H_1}dt, \quad dq = \frac{d\mathfrak{M}}{H_2} - \frac{\mu}{H_2}dt, \quad dr = \frac{d\mathfrak{N}}{H_3} - \frac{\nu}{H_3}dt, \tag{319}$$

причемъ вторые члены лѣвыхъ частей этихъ выраженій:

$$-\frac{\lambda}{H_1}dt, \quad -\frac{\mu}{H_2}dt, \quad -\frac{\nu}{H_3}dt, \tag{320}$$

представляютъ приращенія слагающихъ угловыхъ скоростей, вслѣдствіе продолжающагося движенія по инерціи, т. е.—тѣ приращенія, которыя одни имѣли-бы мѣсто, если-бы моментъ количества движенія оставался неизмѣннымъ по величинѣ и направленію; первые-же члены лѣвыхъ частей выраженій (319):

$$\frac{d\mathfrak{L}}{H_1}, \quad \frac{d\mathfrak{M}}{H_2}, \quad \frac{d\mathfrak{N}}{H_3}, \tag{321}$$

представляютъ приращенія слагающихъ угловыхъ скоростей, обусловливаемыя измѣненіемъ момента количества движенія, т. е. дѣйствіемъ приложенныхъ силъ. Умножая слагающія приращенія (320) соотвѣтственно на $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и складывая, мы найдемъ, что

$$\frac{\mathfrak{L}\lambda}{H_1}+\frac{\mathfrak{M}\mu}{H_2}+\frac{\mathfrak{N}\nu}{H_3}=0\,, \tag{322}$$

вслѣдствіе перваго изъ урр. (292) и урр. (220); отсюда заключаемъ, что измѣненіе вращенія при движеніи по инерціи происходитъ отъ непрерывнаго приложенія безконечно малыхъ угловыхъ скоростей около оси, перпендикулярной къ моменту M.

Обозначая величины слагающихъ по осямъ координатъ приращеній $d\omega$ и $\omega d\varepsilon$ соотвѣтственно черезъ $d'p, d'q, d'r$ и $d''p, d''q, d''r$, мы должны очевидно имѣть:

$$dp=d'p+d''p\,,\qquad dq=d'q+d''q\,,\qquad dr=d'r+d''r\,. \tag{323}$$

Такъ какъ направленіе оси угловой скорости $d\omega$ совпадаетъ съ осью скорости ω, то

$$d'p=d\omega\frac{p}{\omega}\,,\qquad d'q=d\omega\frac{q}{\omega}\,,\qquad d'r=d\omega\frac{r}{\omega}\,. \tag{324}$$

Умножая уравн. (323) соотвѣтственно на $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$, складывая ихъ, и замѣчая, что, вслѣдствіе взаимной перпендикулярности $d\omega$ и $\omega d\varepsilon$,

$$pd''p+qd''q+rd''r=0\,, \tag{325}$$

и что

$$\frac{d'p}{d\omega}\cdot\frac{p}{\omega}+\frac{d'q}{d\omega}\cdot\frac{q}{\omega}+\frac{d'r}{d\omega}\cdot\frac{r}{\omega}=\cos(\omega,d\omega)=1\,, \tag{326}$$

мы получимъ:

$$d\omega=\frac{1}{\omega}(pdp+qdq+rdr)\,, \tag{327}$$

или вслѣдствіе (319):

$$d\omega=\frac{pd\mathfrak{L}}{\omega H_1}+\frac{qd\mathfrak{M}}{\omega H_2}+\frac{rd\mathfrak{N}}{\omega H_3}-\left[\frac{p\lambda}{H_1}+\frac{q\mu}{H_2}+\frac{r\nu}{H_3}\right]\frac{dt}{\omega}\,, \tag{328}$$

гдѣ первый членъ лѣвой части обозначаетъ приращеніе величины угловой скорости ω отъ дѣйствія приложенныхъ силъ, а второй

членъ—приращеніе, при продолжающемся движеніи по инерціи. Обозначая черезъ $\delta\omega$ ту часть приращенія $d\omega$, которая зависитъ отъ дѣйствія приложенныхъ силъ, мы найдемъ очевидно, что

$$\delta\omega = \frac{pd\mathfrak{L}}{\omega H_1} + \frac{qd\mathfrak{M}}{\omega H_2} + \frac{rd\mathfrak{N}}{\omega H_3}. \tag{329}$$

Приращеніе $\delta\omega$, въ свою очередь, можно разсматривать, какъ сумму трехъ другихъ: $\delta_1\omega$, $\delta_2\omega$, $\delta_3\omega$, зависящихъ соотвѣтственно отъ слагающихъ, $\Delta_1\mathrm{M}$, $\Delta_2\mathrm{M}$, $\Delta_3\mathrm{M}$, приращенія $\Delta\mathrm{M}$ момента M. Обращая вниманіе на равенства (302), мы найдемъ изъ (329), что

$$\delta_1\omega = \frac{pd_1\mathfrak{L}}{\omega H_1} + \frac{qd_1\mathfrak{M}}{\omega H_2} + \frac{rd_1\mathfrak{N}}{\omega H_3}, \tag{330}$$

и, на основаніи (307):

$$\begin{aligned}\delta_1\omega &= \left(\frac{p\mathfrak{L}}{H_1} + \frac{q\mathfrak{M}}{H_2} + \frac{r\mathfrak{N}}{H_3}\right)\frac{d\mathrm{M}}{\omega\mathrm{M}} \\ &= (p^2 + q^2 + r^2)\frac{d\mathrm{M}}{\omega\mathrm{M}} = \omega\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}},\end{aligned} \tag{331}$$

т. е. результатъ, извѣстный изъ ур. (269). Точно также, на основаніи (310) и (292), получимъ, что

$$\begin{aligned}\delta_2\omega &= \frac{pd_2\mathfrak{L}}{\omega H_1} + \frac{qd_2\mathfrak{M}}{\omega H_2} + \frac{rd_2\mathfrak{N}}{\omega H_3} \\ &= \left(\frac{\lambda p}{H_1} + \frac{\mu q}{H_2} + \frac{\nu r}{H_3}\right)\frac{\Delta_2\mathrm{M}}{\omega.\Omega}\end{aligned} \tag{332}$$

или, по (291) и (293):

$$\delta_2\omega = \left(\frac{H_2 - H_3}{H_1} + \frac{H_3 - H_1}{H_2} + \frac{H_1 - H_2}{H_3}\right)\frac{\cos\alpha\,.\cos\beta\,.\cos\gamma}{\sin(\mathrm{M},\omega)}\frac{\omega}{\mathrm{M}}\Delta_2\mathrm{M}. \tag{333}$$

Наконецъ, точно такимъ-же образомъ получаемъ:

$$\delta_3\omega = \left(\frac{lp}{H_1} + \frac{mq}{H_2} + \frac{nr}{H_3}\right)\frac{\Delta_3\mathrm{M}}{\omega_1}. \tag{334}$$

Обратимся теперь къ опредѣленію величины и направленія приращенія $\omega d\varepsilon$, т. е. величины слагающихъ $d''p$, $d''q$, $d''r$. На основаніи (323) и (324), мы получимъ:

$$d''p = dp - \frac{p}{\omega}d\omega, \quad d''q = dq - \frac{q}{\omega}d\omega, \quad d''r = dr - \frac{r}{\omega}d\omega; \tag{335}$$

подставляя сюда величины dp, dq, dr изъ (319), мы вычислимъ значенія $d''p, d''q, d''r$, и затѣмъ найдемъ:

$$(\omega d\varepsilon)^2 = (d''p)^2 + (d''q)^2 + (d''r)^2 . \tag{336}$$

Но, для большей наглядности, можно вычислить отдѣльно части приращенія $\omega d\varepsilon$, зависящія отъ дѣйствія приложенныхъ силъ и отъ продолжающагося движенія по инерціи. Для этого приращеніе $\Delta\omega$ представимъ, какъ слагающееся геометрически изъ двухъ: $\Delta'\omega$, зависящаго отъ дѣйствія силъ, и $\Delta''\omega$, зависящаго отъ продолжающагося движенія по инерціи, такъ что

$$\Delta\omega = \Delta'\omega + \Delta''\omega. \tag{337}$$

Проложенія приращенія $\Delta'\omega$ на оси координатъ обозначимъ черезъ $\delta p, \delta q, \delta r$, а проложенія $\Delta''\omega$—черезъ $\partial p, \partial q, \partial r$, такъ что

$$dp = \delta p + \partial p\,, \quad dq = \delta q + \partial q\,, \quad dr = \delta r + \partial r\,, \tag{338}$$

при чемъ, на основаніи (319):

$$\delta p = \frac{d\mathfrak{L}}{H_1}, \quad \delta q = \frac{d\mathfrak{M}}{H_2}, \quad \delta r = \frac{d\mathfrak{N}}{H_3} \tag{339}$$

и

$$\partial p = -\frac{\lambda}{H_1}dt\,, \quad \partial q = \frac{\mu}{H_2}dt\,, \quad \partial r = \frac{\nu}{H_3}dt. \tag{340}$$

Кромѣ того очевидно:

$$\begin{gathered}\Delta'\omega^2 = \delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2, \quad \Delta''\omega^2 = \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2, \\ \Delta\omega^2 = \Delta'\omega^2 + \Delta''\omega^2 - 2\Delta'\omega.\Delta''\omega\cos(\Delta'\omega,\Delta''\omega)\,.\end{gathered} \tag{341}$$

Затѣмъ $\Delta'\omega$ разложимъ на двѣ части: одну $\delta\omega$, направленную вдоль по оси ω, и другую $\omega.\delta\varepsilon$—къ ней перпендикулярную; точно также $\Delta''\omega$ представится двумя соотвѣтствующими слагающими: $\partial\omega$ и $\omega.\partial\varepsilon$, такъ что

$$\begin{gathered}\Delta'\omega = \delta\omega + \omega\,.\,\delta\varepsilon\,, \quad \Delta''\omega = \partial\omega + \omega\,.\,\partial\varepsilon\,, \\ \Delta'\omega^2 = \delta\omega^2 + \omega^2.\,\delta\varepsilon^2\,, \quad \Delta''\omega^2 = \partial\omega^2 + \omega_2.\,\partial\varepsilon^2.\end{gathered} \tag{342}$$

Направленія $\delta\omega$ и $\partial\omega$, совпадая съ осью, будутъ очевидно совпадать другъ съ другомъ; слѣдовательно:

$$d\omega = \delta\omega + \partial\omega\,, \tag{342'}$$

гдѣ, на основаніи (328):

$$\begin{gathered}\delta\omega = \frac{pd\mathfrak{L}}{\omega H_1} + \frac{qd\mathfrak{M}}{\omega H_2} + \frac{rd\mathfrak{M}}{\omega H_3}, \\ \partial\omega = -\left[\frac{p\lambda}{H_1} + \frac{q\mu}{H_2} + \frac{r\nu}{H_3}\right]\frac{dt}{\omega}\,.\end{gathered} \tag{343}$$

Направленія-же $\omega.\delta\varepsilon$ и $\omega.\partial\varepsilon$, лежа въ плоскости, перпендикулярной къ оси ω, будутъ дѣлать между собою нѣкоторый уголъ $(\delta\varepsilon,\partial\varepsilon)$, такъ что величина ихъ результирующей $\omega d\varepsilon$ опредѣлится изъ ур.

$$(\omega d\varepsilon)^2 = (\omega\delta\varepsilon)^2 + (\omega\partial\varepsilon)^2 - 2(\omega\delta\varepsilon)(\omega\partial\varepsilon)\cos(\delta\varepsilon,\partial\varepsilon). \tag{344}$$

Проложенія на оси координатъ величинъ $\delta\omega$, $\omega.\delta\varepsilon$, $\partial\omega$, $\omega.\partial\varepsilon$ обозначимъ соотвѣтственно слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{lllll} \text{для } \delta\omega: & \delta' p, & \delta' q, & \delta' r, \\ \text{» } \omega\delta\varepsilon: & \delta'' p, & \delta'' q, & \delta'' r, \\ \text{» } \partial\omega: & \partial' p, & \partial' q, & \partial' r, \\ \text{» } \omega\partial\varepsilon: & \partial'' p, & \partial'' q, & \partial'' r, \end{array} \tag{345}$$

такъ что

$$\begin{array}{lll} \delta p = \delta' p + \delta'' p, & \delta q = \delta' q + \delta'' q, & \delta r = \delta' r + \delta'' r, \\ \partial p = \partial' p + \partial'' p, & \partial q = \partial' q + \partial'' q, & \partial r = \partial' r + \partial'' r, \end{array} \tag{346}$$

а также, сообразно съ (323):

$$\begin{array}{lll} d' p = \delta' p + \partial' p, & d' q = \delta' q + \partial' q, & d' r = \delta' r + \partial' r, \\ d'' p = \delta'' p + \partial'' p, & d'' q = \delta'' q + \partial'' q, & d'' r = \delta'' r + \partial'' r; \end{array} \tag{347}$$

кромѣ того очевидно:

$$\begin{array}{lll} d' p = \dfrac{p}{\omega}\delta\omega, & \delta' q = \dfrac{q}{\omega}\delta\omega, & \delta' r = \dfrac{r}{\omega}\delta\omega, \\ \partial' p = \dfrac{p}{\omega}\partial\omega, & \partial' q = \dfrac{q}{\omega}\partial\omega, & \partial' r = \dfrac{r}{\omega}\partial\omega. \end{array} \tag{348}$$

Искомыя величины $\omega.\delta\varepsilon$ и $\omega.\partial\varepsilon$ опредѣлятся изъ урр. (342), на основаніи (339), (340) и (341), слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} (\omega\delta\varepsilon)^2 &= \Delta'\omega^2 - \delta\omega^2 \\ &= \frac{d\mathfrak{L}^2}{H_1^2} + \frac{d\mathfrak{M}^2}{H_2^2} + \frac{d\mathfrak{N}^2}{H_3^2} - \left(\frac{pd\mathfrak{L}}{\omega H_1} + \frac{qd\mathfrak{M}}{\omega H_2} + \frac{rd\mathfrak{N}}{\omega H_3}\right)^2, \end{aligned} \tag{349}$$

$$\begin{aligned} (\omega\partial\varepsilon)^2 &= \Delta''\omega^2 - \partial\omega^2 \\ &= \left(\frac{\lambda^2}{H_1^2} + \frac{\mu^2}{H_2^2} + \frac{\nu^2}{H_3^2}\right)dt^2 - \left(\frac{p\lambda}{H_1} + \frac{q\mu}{H_2} + \frac{r\nu}{H_3}\right)^2 \frac{dt^2}{\omega^2}. \end{aligned} \tag{350}$$

Подставляя въ уравненіе (349) соотвѣтственно, вмѣсто $d\mathfrak{L}, d\mathfrak{M}, d\mathfrak{N}$, величины $d_1\mathfrak{L}\ldots d_2\mathfrak{L}\ldots d_3\mathfrak{L}$ изъ (307), (310), (316), мы получимъ выраженія для частей $\omega\delta_1\varepsilon$, $\omega\delta_2\varepsilon$, $\omega\delta_3\varepsilon$ приращенія $\omega\delta\varepsilon$, зависящихъ

отъ приращеній, $\Delta_1 M$, $\Delta_2 M$, $\Delta_3 M$, момента количества движенія. Такимъ образомъ мы найдемъ:

$$\omega\delta_1\varepsilon = 0\,, \tag{351}$$

$$(\omega\delta_2\varepsilon)^2 = \left(\frac{\lambda^2}{H_1^{\,2}} + \frac{\mu^2}{H_2^{\,2}} + \frac{\nu^2}{H_3^{\,2}}\right)\frac{\Delta_2 M^2}{\Omega^2} - \left(\frac{p\lambda}{\omega H_1} + \frac{q\mu}{\omega H_2} + \frac{r\nu}{\omega H_3}\right)^2 \frac{\Delta_2 M^2}{\Omega^2}\,, \tag{352}$$

$$(\omega\delta_3\varepsilon)^2 = \left(\frac{l^2}{H_1^{\,2}} + \frac{m^2}{H_2^{\,2}} + \frac{n^2}{H_3^{\,2}}\right)\Delta_3 M^2 - \left(\frac{pl}{\omega H_1} + \frac{qm}{\omega H_2} + \frac{rn}{\omega H_3}\right)^2 \Delta_3 M^2. \tag{353}$$

Наконецъ, направленія приращеній $\omega\delta\varepsilon$ и $\omega\partial\varepsilon$, т. е. ихъ углы съ осями координатъ, мы найдемъ, вычисливъ слагающія $\delta'' p \ldots \partial'' p \ldots$ изъ урр. (346), на основаніи (339), (340) и (348). Зная упомянутыя слагающія, мы получаемъ для косинусовъ угловъ направленій $\omega\delta\varepsilon$ и $\omega\partial\varepsilon$ съ осями координатъ соотвѣтственно величины:

$$\frac{\delta'' p}{\omega\delta\varepsilon}, \quad \frac{\delta'' q}{\omega\delta\varepsilon}, \quad \frac{\delta'' r}{\omega\delta\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\partial'' p}{\omega\partial\varepsilon}, \quad \frac{\partial'' q}{\omega\partial\varepsilon}, \quad \frac{\partial'' r}{\omega\partial\varepsilon}, \tag{354}$$

гдѣ $\omega\delta\varepsilon$ и $\omega\partial\varepsilon$ вычисляются изъ (349) и (350).

Имѣя всѣ вышеприведенныя соотношенія между приращеніями количества движенія и скорости вращенія, мы можемъ рѣшить вопросъ о томъ, какія должны быть приложены къ твердому тѣлу силы, чтобы произвести тѣ или другія, заранѣе предписанныя, измѣненія скорости вращенія. Разберемъ наиболѣе простыя изъ предположеній относительно этихъ измѣненій.

1) Угловая скорость и направленіе оси вращенія должны оставаться неизмѣнными. Тогда очевидно, $dp = dq = dr = 0$, и, на основаніи (319):

$$d\mathfrak{L} = \lambda dt\,, \qquad d\mathfrak{M} = \mu dt\,, \qquad d\mathfrak{N} = \nu dt, \tag{355}$$

или по (297):

$$L = \lambda\,, \qquad M = \mu\,, \qquad N = \nu\,; \tag{356}$$

т. е. моментъ приложенныхъ силъ долженъ быть равенъ и параллеленъ моменту центростремительныхъ силъ, или другими словами, приложенныя силы должны уравновѣшивать центробѣжныя силы. Величина M приложеннаго момента будетъ очевидно, на основаніи (293):

$$\mathsf{M} = \Omega = M\omega\,.\,\sin(M,\omega)\,, \tag{357}$$

или, по (228):

$$\mathsf{M} = 2T \,.\, \mathrm{tang}(M,\omega)\,. \qquad (357)'$$

Если тѣло вращается равномѣрно около неподвижной оси, то M представляетъ моментъ, обусловливаемый сопротивленіемъ этой оси. Равный и противоположный ему моментъ будетъ принадлежать силамъ давленія вращающагося тѣла на ось. Если $\sin(M,\omega) = 0$, т. е. если ось вращенія совпадаетъ съ одною изъ главныхъ осей инерціи, то очевидно и $\mathsf{M} = 0$.

2) Должна оставаться неизмѣнною только величина угловой скорости. Тогда очевидно, $d'p = d'q = d'r = 0$, и, на основаніи (347) и (348):

$$\delta\omega + \partial\omega = d\omega = 0\,, \qquad (358)$$

откуда, на основаніи (328), видимъ, что только одно уравненіе опредѣляетъ три искомыя величины, L, M, N, вслѣдствіе чего направленіе результирующаго момента M приложенныхъ силъ можетъ быть выбрано произвольно. Выбирая это направленіе параллельно моменту количества движенія M (т. е. заставляя ΔM совпадать съ $\Delta_1 M$), и обозначая величину такого момента силъ черезъ M_1, будемъ имѣть по (307), гдѣ $dM = \mathsf{M}_1 . dt$, и по (328):

$$\mathsf{M}_1 = \left(\frac{p\lambda}{H_1} + \frac{q\mu}{H_2} + \frac{r\nu}{H_3}\right)\frac{M}{\omega^2}\,. \qquad (359)$$

Выбирая M параллельно Ω (т. е. параллельно $\Delta_2 M$) и обозначая его величину черезъ M_2, получаемъ, какъ прежде, изъ (328) и (310):

$$\mathsf{M}_2 = \Omega\,. \qquad (359)'$$

Наконецъ, выбирая M параллельно $\Delta_3 M$, получаемъ изъ (316) и (328):

$$\left(\frac{lp}{H_1} + \frac{mq}{H_2} + \frac{nr}{H_3}\right)\mathsf{M}_3 = \left(\frac{\lambda p}{H_1} + \frac{\mu q}{H_2} + \frac{\nu r}{H_3}\right). \qquad (359)''$$

3) Должно оставаться неизмѣннымъ только одно направленіе оси вращенія. Тогда $d''p = d''q = d''r = 0$, и, на основаніи (335), (319) и (328):

$$\begin{aligned}
\frac{d''p}{dt} &= \frac{L-\lambda}{H_1} - \left[\frac{p(L-\lambda)}{\omega H_1} + \frac{q(M-\mu)}{\omega H_2} + \frac{r(N-\nu)}{\omega H_3}\right]\frac{p}{\omega} = 0\,,\\
\frac{d''q}{dt} &= \frac{M-\mu}{H_2} - \left[\frac{p(L-\lambda)}{\omega H_1} + \frac{q(M-\mu)}{\omega H_2} + \frac{r(N-\nu)}{\omega H_3}\right]\frac{q}{\omega} = 0\,, \qquad (360)\\
\frac{d''r}{dt} &= \frac{N-\nu}{H_3} - \left[\frac{p(L-\lambda)}{\omega H_1} + \frac{q(M-\mu)}{\omega H_2} + \frac{r(N-\nu)}{\omega H_3}\right]\frac{r}{\omega} = 0\,,
\end{aligned}$$

откуда видимъ, что

$$\frac{L-\lambda}{N-\nu}=\frac{pH_1}{rH_3}=\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}, \qquad \frac{M-\mu}{N-\nu}=\frac{qH_2}{rH_3}=\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}, \tag{361}$$

т. е., что результирующій моментъ силъ $(L-\lambda, M-\mu, N-\nu)$, составленный изъ искомаго момента (L, M, N) и момента центробѣжныхъ силъ $(-\lambda, -\mu, -\nu)$, долженъ быть параллеленъ моменту количества движенія $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, а по величинѣ можетъ быть произволенъ. Называя эту величину черезъ Q, т. е. полагая

$$Q^2=(L-\lambda)^2+(M-\mu)^2+(N-\nu)^2,$$

возводя затѣмъ урр. (361) въ квадратъ и складывая, получаемъ:

$$\frac{Q^2-(N-\nu)^2}{(N-\nu)^2}=\frac{\mathrm{M}^2-\mathfrak{N}^2}{\mathfrak{N}^2},$$

вслѣдствіе чего заключаемъ, что

$$L=\lambda+Q\frac{\mathfrak{L}}{\mathrm{M}}, \qquad M=\mu+Q\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{M}}, \qquad N=\nu+Q\frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{M}}; \tag{362}$$

т. е. искомый моментъ (L, M, N) слагается изъ двухъ: момента центростремительныхъ силъ, и нѣкотораго момента, произвольной величины, но параллельнаго моменту M. Если твердое тѣло вращается съ перемѣнною угловою скоростію около неподвижной оси, то λ, μ, ν будутъ очевидно слагающими момента силъ сопротивленія, оказываемаго осью вращающемуся тѣлу.

4) Угловая скорость не должна измѣнять своей величины сравнительно съ движеніемъ по инерціи; т. е. должны быть $\delta' p=\delta' q=\delta' r=0$, или, по (348), $\delta\omega=0$. Слѣдовательно, слагающія L, M, N искомаго момента силъ M опредѣлятся, на основаніи (329), однимъ уравненіемъ:

$$\frac{pL}{H_1}+\frac{qM}{H_2}+\frac{rN}{H_3}=0. \tag{263}$$

Если направленіе M выберемъ параллельно M, то обозначая величину искомаго момента, направленнаго такимъ образомъ, черезъ M_1, получимъ: $\mathsf{M}_1=0$. Если будемъ искать моментъ, параллельный $\Delta_2\mathrm{M}$, то его величина M_2 опять опредѣлится по (333) равною нулю, если только всѣ моменты инерціи не равны между собою, или если ось вращенія не совпадаетъ съ одною изъ осей инерціи, когда M_2 можетъ быть произвольной величины. Наконецъ, на основаніи (334),

получимъ также, что $\mathsf{M}_3 = 0$, если только

$$\frac{lp}{H_1} + \frac{mq}{H_2} + \frac{nr}{H_3} \text{ не равно нулю,}$$

ибо въ послѣднемъ случаѣ M_3 можетъ быть произвольной величины.

5) Не должно измѣняться направленіе оси вращенія сравнительно съ движеніемъ по инерціи. Въ такомъ случаѣ очевидно, $\delta'' p = \delta'' q = \delta'' r = 0$. На основаніи (346), (348) и (339), получаемъ:

$$\frac{\delta'' p}{dt} = \frac{L}{H_1} - \left(\frac{pL}{\omega H_1} + \frac{qM}{\omega H_2} + \frac{rN}{\omega H_3}\right)\frac{p}{\omega} = 0, \quad \text{и т. д.,} \qquad (364)$$

откуда также, какъ изъ (360), получаемъ:

$$L = Q\frac{\mathfrak{L}}{\mathrm{M}}, \qquad M = Q\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{M}}, \qquad N = Q\frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{M}}; \qquad (365)$$

т. е. искомый моментъ можетъ быть произвольной величины Q, но направленъ всегда параллельно М.

---

§ 50. Движеніе несвободнаго твердаго тѣла.

Общія уравненія движенія несвободнаго твердаго тѣла, т. е. зависимости ускореній различныхъ его точекъ отъ приложенныхъ силъ, получаются, на основаніи принципа д'Аламбера (§ 30), изъ уравненій равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла (§ 42), въ которыхъ приложенныя силы должны быть замѣнены потерянными силами. При этомъ величины λ_1, $\lambda_2 \ldots$ будутъ, также какъ и въ случаѣ равновѣсія, представлять силы сопротивленія, съ которыми механизмы, ограничивающіе свободу тѣла, дѣйствуютъ на это послѣднее. Упомянутыя сопротивленія, завися въ каждый моментъ движенія отъ величины потерянныхъ силъ, будутъ измѣняться во время движенія съ измѣненіемъ скоростей точекъ тѣла. Изслѣдованіе свойствъ общихъ уравненій движенія несвободнаго твердаго тѣла выходитъ изъ границъ настоящаго изложенія, вслѣдствіе сложности математическаго анализа. Поэтому мы ограничимся излѣдованіемъ простѣйшаго случая движенія твердаго тѣла около неподвижной оси.

Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси принадлежитъ очевидно къ числу обращаемыхъ движеній (§ 32), при которыхъ приращеніе кинетической энергіи измѣряетъ работу, произведенную

приложенными силами. Если мы обозначимъ черезъ ω угловую скорость тѣла около его неподвижной оси, черезъ r—разстояніе какой либо его точки, съ массою m, отъ оси, черезъ v—ея скорость, то кинетическая энергія T этого твердаго тѣла въ данный моментъ времени выразится очевидно, какъ

$$T = \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2, \tag{366}$$

откуда, называя черезъ H моментъ инерціи тѣла около оси вращенія, получаемъ:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 H. \tag{367}$$

Если для какого нибудь первоначальнаго момента времени мы обозначимъ величины кинетической энергіи и угловой скорости черезъ T_0 и ω_0, то приращеніе кинетической энергіи, начиная отъ упомянутаго начальнаго времени до разсматриваемаго выше, будетъ

$$T - T_0 = \frac{1}{2}H(\omega^2 - \omega_0{}^2), \tag{368}$$

и представитъ, на основаніи § 33, работу приложенныхъ силъ въ теченіи соотвѣтствующаго промежутка времени. Если разсматриваемый промежутокъ времени будетъ безконечно малъ, то разности $T—T_0$ и $\omega—\omega_0$ будутъ также безконечно малыми величинами, которыя мы обозначимъ черезъ dT и $d\omega$. Въ такомъ случаѣ ур. (368) будетъ имѣть болѣе простой видъ:

$$dT = \frac{1}{2}H(\omega + \omega_0)\,d\omega = \frac{1}{2}H(2\omega + d\omega)\,d\omega$$

или, такъ какъ $d\omega^2$ въ свою очередь безконечно мало въ сравненіи съ $d\omega$ (ибо отношеніе $\frac{d\omega^2}{d\omega} = d\omega$ безконечно мало):

$$dT = H\omega d\omega. \tag{369}$$

Приращеніе кинетической энергіи (368), или (369), можетъ быть обусловлено единственно тою слагающею частію момента приложенныхъ силъ, которая направлена по оси вращенія, ибо, на основаніи (103) (§ 42), отсутствіе этой слагающей представляетъ единственное условіе равновѣсія твердаго тѣла около неподвижной оси. Если мы обозначимъ черезъ M величину момента приложенныхъ силъ, направленнаго по оси вращенія, то $\omega\mathsf{M}dt$ будетъ, на основаніи (265), работа, совер-

шенная упомянутыми силами во время dt, при безконечно маломъ угловомъ перемѣщеніи ωdt; такъ какъ эта работа съ другой стороны измѣряется соотвѣтствующимъ приращеніемъ кинетической энергіи, то по (369):

$$\omega \mathsf{M} dt = H\omega d\omega \,, \tag{370}$$

или

$$\mathsf{M} dt = H d\omega \,. \tag{370'}$$

Суммируя элементарныя работы по всѣмъ безконечно малымъ элементамъ времени, составляющимъ данный конечный промежутокъ времени, для начала и конца котораго величины угловой скорости суть ω_0 и ω, мы получаемъ:

$$\Sigma\omega \mathsf{M} dt = H\Sigma\omega d\omega \,, \tag{371}$$

или

$$\Sigma \mathsf{M} dt = H\Sigma d\omega \,, \tag{371'}$$

и разыскивая суммы, какъ въ § 3, находимъ:

$$\Sigma\omega \mathsf{M} dt = \frac{1}{2} H(\omega^2 - \omega_0{}^2) \,, \tag{372}$$

$$\Sigma \mathsf{M} dt = H(\omega - \omega_0). \tag{372'}$$

Если величина момента M во все время движенія остается неизмѣнною, то сумма лѣвой части ур. (372)', берется непосредственно, и мы получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M} t &= H(\omega - \omega_0) \,, \\ \omega &= \omega_0 + \frac{\mathsf{M}}{H} t \,, \end{aligned}\right\} \tag{373}$$

гдѣ время t считается отъ того момента, когда $\omega = \omega_0$. Такое равномѣрное приращеніе угловой скорости имѣетъ напримѣръ мѣсто, когда приложенныя силы не измѣняютъ ни своей величины, ни направленія относительно тѣла, какъ-бы слѣдя за вращающимся тѣломъ и въ пространствѣ направляясь послѣдовательно различнымъ образомъ.

Изъ случаевъ измѣняющейся величины момента M мы разберемъ тотъ, когда взаимно параллельныя внѣшнія силы, будучи приложены во время движенія тѣла къ однѣмъ и тѣмъ-же его точкамъ, сохраняютъ свою величину и направленіе въ пространствѣ, и измѣняютъ слѣдовательно это направленіе по отношенію къ движущемуся тѣлу.

Въ такомъ случаѣ съ большею легкостію можно вычислить для каждой силы сумму лѣвой части ур. (372). т. е. работу; ибо для силы, приложенной къ одной и той-же точкѣ и сохраняющей свою величину и направленіе во время движенія этой послѣдней, работа, совершенная между двумя положеніями движущейся точки, не зависитъ отъ формы пройденнаго пути (§ 35).

Нѣкоторыя изъ положеній твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси будутъ, при дѣйствіи вышеописанныхъ силъ, положеніями равновѣсія; именно—тѣ два положенія, при которыхъ неизмѣнное направленіе приложенныхъ силъ будетъ параллельно плоскости, проходящей черезъ ось вращенія и центръ параллельныхъ силъ; при одномъ изъ упомянутыхъ положеній направленіе равнодѣйствующей будетъ идти отъ центра параллельныхъ силъ къ оси, что будетъ соотвѣтствовать неустойчивому равновѣсію; при другомъ положеніи направленіе равнодѣйствующей будетъ отъ центра въ противоположную сторону относительно оси, что обусловитъ устойчивое равновѣсіе. Если силы будутъ параллельны оси, то при всякомъ положеніи тѣла вокругъ оси оно будетъ въ равновѣсіи. При вращеніи тѣла будетъ отлична отъ нуля работа тѣхъ соотвѣтствующихъ частей приложенныхъ силъ, которыя направлены перпендикулярно къ оси. Выберемъ два положенія тѣла, при которыхъ плоскость, проходящая черезъ ось и точку приложенія равнодѣйствующей, образуетъ съ плоскостію устойчиваго равновѣсія соотвѣтственно углы α_0 и α, и вычислимъ работу приложенныхъ силъ между этими положеніями, или равную ей работу равнодѣйствующей. Пусть плоскость рисунка (рис. 80) будетъ перпендикулярна къ оси, слѣдъ которой пусть будетъ въ O; пусть OC будетъ слѣдъ плоскости устойчиваго равновѣсія, C, C', C'' — три положенія центра параллельныхъ силъ, и F—величина части равнодѣйствующей, перпендикулярной къ оси и направленной всегда параллельно OC. Опуская изъ C'' и C' перпендикуляры на OC, легко видѣть, что работа силы F, при перемѣщеніи центра силъ изъ C'' въ C', будетъ $F.\overline{BD}$, или

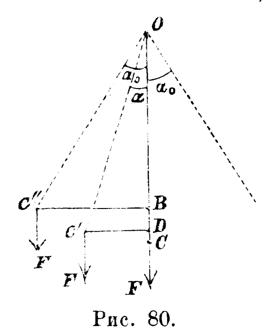


Рис. 80.

$$F.\overline{BD} = F(\overline{OD} - \overline{OB}) = Fr(\cos\alpha - \cos\alpha_0), \tag{374}$$

гдѣ r есть разстояніе центра силъ отъ оси. Такъ какъ выраженіе

(374) опредѣляетъ лѣвую часть ур. (372), то мы будемъ имѣть:

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = \frac{2Fr}{H}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)\,, \tag{375}$$

откуда видимъ прежде всего, что если первоначальная скорость $\omega = 0$, то $\cos\alpha > \cos\alpha_0$ и $\alpha_0 > \alpha$; т. е. тѣло будетъ двигаться къ положенію устойчиваго равновѣсія, въ которомъ пріобрѣтетъ наибольшую угловую скорость

$$\frac{2Fr}{H}(1 - \cos\alpha_0)\,; \tag{376}$$

затѣмъ угловая скорость будетъ уменьшаться до нуля, при отклоненіи на уголъ $\alpha = \alpha_0$ въ другую сторону отъ $\overline{OC}$, откуда тѣло повернется назадъ, и т. д. Такимъ образомъ, движеніе будетъ состоять въ колебаніи около положенія устойчиваго равновѣсія, причемъ величина угла колебанія—у г л о в а я а м п л и т у д а—будетъ равна $2\alpha_0$. Опредѣлить зависимость скорости отъ времени съ помощію простѣйшихъ функцій мы можемъ только въ томъ случаѣ, когда отклоненіе тѣла отъ положенія равновѣсія очень мало, т. е. когда всякій изъ угловъ α настолько малъ, что мы можемъ принять разность между α и $\sin\alpha$ исчезающею въ сравненіи съ обѣими упомянутыми величинами, т. е. положить:

$$\sin\alpha = \alpha \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}\,. \tag{377}$$

Тогда зная, что

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

и что слѣдовательно по (377):

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\,, \tag{378}$$

мы получимъ изъ (375), полагая $\omega = 0$:

$$\omega^2 = \frac{Fr}{H}(\alpha_0{}^2 - \alpha^2)\,. \tag{379}$$

Наибольшая скорость, при $\alpha = 0$, будетъ

$$\omega_1 = \alpha_0\sqrt{\frac{Fr}{H}}\,. \tag{380}$$

На нѣкоторой прямой отложимъ длину $\overline{AB} = 2\alpha_0$, и на $\overline{AB}$, какъ на діаметрѣ, построимъ окружность (рис. 81). Представимъ себѣ нѣкоторую точку, движущуюся по окружности равномѣрно, со скоростію ω_1. Тогда скорость v проложенія этой точки на діаметръ, будучи равна проложенію скорости ω_1 на тотъ-же діаметръ, представится въ видѣ:

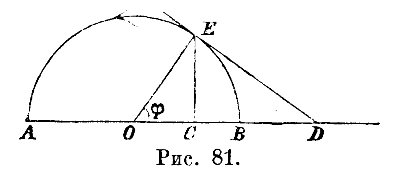


Рис. 81.

$$v = \omega_1 \cos EDA = \omega_1 \sin \varphi\,, \tag{381}$$

гдѣ φ есть уголъ между радіусомъ круга, проведеннымъ къ движущейся точкѣ, и діаметромъ AB. Но

$$\sin \varphi = \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}{\alpha_0}\,, \tag{382}$$

гдѣ $\alpha = \overline{OC}$. Такимъ образомъ, получимъ изъ (381):

$$v = \omega_1 \frac{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}{\alpha_0} = \sqrt{(\alpha_0^2 - \alpha^2)\frac{Fr}{H}}\,. \tag{383}$$

Сравнивая это послѣднее выраженіе съ (379), видимъ, что проложеніе точки E, находясь на разстояніи α отъ центра O, имѣетъ скорость, величина которой равна величинѣ угловой скорости разсматриваемаго выше тѣла, при его отклоненіи на уголъ α отъ положенія устойчиваго равновѣсія. Слѣдовательно, если мы найдемъ зависимость отъ времени угла φ (рис. 81), то найдемъ искомую зависимость отъ времени угловой скорости ω, ибо, по численной величинѣ, $\omega = v$. Но замѣчая, что дуга $\overline{BE}$, проходимая точкою равномѣрно во время t, равна $\omega_1 t$, и припоминая величину α_0 радіуса этой дуги, мы находимъ:

$$\varphi = \frac{\omega_1 t}{\alpha_0} = t \,.\, \sqrt{\frac{Fr}{H}}\,, \tag{384}$$

вслѣдствіе чего

$$\omega = \omega_1 \sin \frac{\omega_1}{\alpha_0} t\,, \tag{385}$$

откуда видимъ, что скорость черезъ опредѣленные промежутки времени будетъ принимать прежнія свои величины. Дѣйствительно, по истеченіи нѣкотораго промежутка времени τ, послѣ времени t, вели-

чина скорости будетъ очевидно:

$$\omega' = \omega_1 \sin \frac{\omega_1}{\alpha_0}(t + \tau),$$

и ω' сдѣлается равною ω, если

$$\frac{\omega_1}{\alpha_0}(t+\tau) = \frac{\omega_1}{\alpha_0} + 2\pi, \quad \text{откуда} \quad \tau = 2\pi\frac{\alpha_0}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{Fr}}. \qquad (386)$$

Промежутокъ времени τ, по истеченіи котораго угловая скорость колеблющагося около оси тѣла принимаетъ свою прежнюю величину и прежній знакъ, называется временемъ полнаго колебанія. Очевидно, что въ теченіи этого времени тѣло, исходя изъ какого-либо своего положенія вокругъ оси колебанія, поворачивается въ ту и другую сторону всего на уголъ равный двойной угловой амплитудѣ. Вспомогательныый уголъ φ (381), который носитъ названіе фазы колебанія, измѣняется при этомъ на 2π. Кромѣ того черезъ промежутокъ времени $\frac{\tau}{2}$ всякая скорость даннаго колебанія приметъ тоже свою прежнюю величину, но будетъ противоположна первоначальной по знаку. Этотъ промежутокъ времени называется временемъ простаго колебанія. Очевидно, что во время простаго колебанія фаза измѣняется на полуокружность, т. е. π, а уголъ α—на угловую амплитуду, какъ это легко видѣть изъ рисунка (81). Выраженіе (386) показываетъ, что время колебанія не зависитъ въ данномъ случаѣ отъ величины размаха, если только эта послѣдняя настолько мала, что синусъ амплитуды весьма мало разнится отъ угла амплитуды. Вводя величину τ въ уравненіе (385), мы получимъ, на основаніи (386):

$$\omega = \frac{2\pi\alpha_0}{\tau}\sin\frac{2\pi}{\tau}t. \qquad (387)$$

Если параллельныя силы приложены къ каждой изъ матеріальныхъ точекъ, составляющихъ данное тѣло, и если ускоренія этихъ силъ одинаковы, какъ въ случаѣ дѣйствія тяжести, то по § 42 (23)$'$ введенныя выше величины F и r будутъ:

$$F = g\Sigma m, \qquad r = \bar{r} = \frac{\Sigma m\rho}{\Sigma m}, \qquad (388)$$

гдѣ g есть ускореніе, $\bar{r}$—разстояніе центра тяжести тѣла отъ оси и ρ—разстояніе матеріальной точки m отъ той-же оси. Для такого

случая уравн. (386) обращается въ

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g\overline{r}\Sigma m}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma m\rho^2}{g\Sigma m\rho}}\,. \tag{389}$$

Твердое тѣло, колеблющееся подъ дѣйствіемъ тяжести около неподвижной оси, носитъ названіе сложнаго маятника. Если мы представимъ себѣ маятникъ въ видѣ одной матеріальной точки m, находящейся на неизмѣнномъ разстояніи l отъ неподвижной оси, то для такого случая

$$H = ml^2\,, \qquad \overline{r} = l\,, \qquad F = mg\,,$$

и (390)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Такого рода маятникъ называется простымъ или математическимъ. Сравнивая (390) и (389), мы видимъ, что время колебанія сложнаго маятника тоже самое, что нѣкотораго простаго, длина котораго

$$l = \frac{\Sigma m\rho^2}{\Sigma m\rho} = \frac{H}{\overline{r}\Sigma m}\,. \tag{391}$$

Конецъ линіи длины l (391), проходящей черезъ центръ инерціи сложнаго маятника перпендикулярно къ оси, опредѣляетъ точку, называемую центромъ качанія, Если неподвижную ось перенесемъ параллельно самой себѣ въ центръ качанія маятника, то время его колебанія будетъ:

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{H_1}{g\overline{r}_1\Sigma m}}\,, \tag{392}$$

гдѣ H_1 есть моментъ инерціи относительно новой оси, а $\overline{r}_1$—разстояніе отъ нея центра тяжести. Но очевидно, $\overline{r}_1 = l - \overline{r}$, и, на основаніи (211):

$$H_1 = (l - \overline{r})^2 \Sigma m + H_0\,, \qquad H = \overline{r}^2 \Sigma m + H_0\,,$$

гдѣ H_0 есть моментъ инерціи около оси, проходящей параллельно данной черезъ центръ тяжести. Слѣдовательно:

$$H_1 = [(l - \overline{r})^2 - \overline{r}^2]\,\Sigma m + H = l\,(l - 2\overline{r})\,\Sigma m + H\,,$$

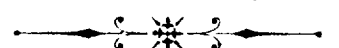
и по (391):

$$= l\,(l - 2\overline{r})\,\Sigma m - l\overline{r}\Sigma m = l\,(l - \overline{r})\,\Sigma m\,,$$

вслѣдствіе чего ур. (392) даетъ:

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{l(l-\bar{r})\Sigma m}{g(l-\bar{r})\Sigma m}} = \sqrt{\frac{l}{g}} = \tau\,; \tag{393}$$

т. е. время колебанія отъ упомянутаго перемѣщенія оси не измѣнится, и новый центръ колебанія будетъ лежать на старой оси.



Вращеніе твердаго тѣла съ угловою скоростію ω около оси, находящейся въ разстояніи $\bar{r}$ отъ центра инерціи, можно представить себѣ, какъ вращеніе со скоростію ω около параллельной оси, проходящей черезъ центръ инерціи, и вмѣстѣ—какъ поступательное движеніе по кругу радіуса $\bar{r}$, со скоростію $\bar{r}\omega$ (§ 13, (65)). Если-бы твердое тѣло было свободно, то упомянутое поступательное круговое движеніе было-бы обусловлено силою, приложенною къ центру инерціи, направленною къ центру круга и равною $\frac{(\bar{r}\omega)^2}{\bar{r}}\Sigma m$ или $\bar{r}\omega^2\Sigma m$. Сохраненіе-же направленія оси вращенія было-бы въ такомъ случаѣ обусловлено парою, моментъ которой былъ-бы перпендикуляренъ къ оси и равенъ (§ 49 (357)) $M\omega\sin(M,\omega)$. Въ случаѣ существованія неподвижной оси тѣже самыя сила и пара опредѣляютъ сопротивленіе оси вращающемуся тѣлу. Если ось параллельна одной изъ главныхъ осей инерціи, то $\sin(M,\omega) = 0$, и сопротивленіе выражается одною центростремительною силою, приложенною къ центру инерціи; если кромѣ того $r = 0$, т. е. ось проходитъ черезъ центръ инерціи, то сопротивленіе равно нулю.

Плоскость упомянутой выше пары совпадаетъ, на основаніи (292), съ плоскостію, проходящею черезъ прямую, проведенную параллельно оси черезъ центръ инерціи тѣла, и черезъ прямую, проведенную черезъ центръ инерціи параллельно моменту количества движенія M. Центростремительная сила при этомъ вообще не совпадаетъ съ плоскостію пары, образуя съ нею нѣкоторый уголъ ψ, или съ ея моментомъ—уголъ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$. Углы φ или ψ легко опредѣлятся по данным неизмѣннымъ положеніямъ неподвижной оси и линіи $\bar{r}$ относительно главныхъ осей инерціи. Дѣйствительно, зная углы α, β, γ оси вращенія съ осями инерціи и величину главныхъ моментовъ инерціи, мы опредѣлимъ изъ (291) или (291)' углы момента Ω съ этими осями, т. е. углы момента нашей пары; а затѣмъ, зная эти углы и углы

линіи $\bar{r}$ съ тѣми-же осями, легко вычислимъ косинусъ угла φ. Найдя уголъ φ, мы разложимъ пару $\Omega = M\omega \sin(M,\omega)$ на двѣ: одну, равную $\Omega \sin\varphi$, въ плоскости линіи $\bar{r}$ и оси, и другую, $\Omega \cos\varphi$ — въ плоскости перпендикулярной къ $\bar{r}$. Первая пара, вмѣстѣ съ силою $\bar{r}\omega^2\Sigma m$ даетъ силу, равную и параллельную только-что упомянутой, и приложенную на разстояніи $\frac{\Omega \sin\varphi}{\bar{r}\omega^2\Sigma m}$ отъ центра инерціи. Мы остановимся на случаѣ, когда линія $\bar{r}$ лежитъ въ плоскости пары, т. е. когда $\sin\varphi = 1$. Въ такомъ случаѣ сопротивленіе оси выразится, если тѣло колеблется подъ дѣйствіемъ тяжести, силою

$$\bar{r}\omega^2\Sigma m \quad \text{или по (379):} \quad \frac{F\bar{r}^2\Sigma m}{H}(\alpha_0^2 - \alpha^2), \tag{394}$$

приложенною, какъ вообще во всякомъ случаѣ, на разстояніи

$$\partial = \frac{\Omega}{\bar{r}\omega^2\Sigma m} \tag{395}$$

отъ центра инерціи. Но, на основаніи (291):

$$\Omega = \omega^2 U, \tag{396}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} U^2 = \cos^2\beta\cos^2\gamma\,(H_2 - H_3)^2 + \cos^2\gamma\cos^2\alpha\,(H_3 - H_1)^2 \\ + \cos^2\alpha\cos^2\beta\,(H_1 - H_2)^2, \end{aligned} \tag{397}$$

и при неизмѣнномъ положеніи оси относительно осей инерціи не измѣняется. Слѣдовательно:

$$\partial = \frac{U}{\bar{r}\Sigma m} \tag{398}$$

и не измѣняется во время движенія.

—⁂—

Разсмотримъ еще, въ видѣ примѣра, условія равновѣсія, равномѣрно вращающагося маятника. Представимъ себѣ тяжелое твердое тѣло, подвижное около горизонтальной оси, и вращающееся равномѣрно около нѣкоторой вертикальной оси, не совпадающей съ его центромъ тяжести. Найдемъ соотношеніе между угловою скоростію и угломъ χ, на который линія, представляющая растояніе $\bar{r}$ центра тяжести отъ горизонтальной оси и при отсутствіи вращенія совпадающая съ вертикальною осью, отклонится отъ этой послѣдней при

вращеніи. Примемъ для простоты вычисленія, что горизонтальная ось параллельна оси инерціи H_3, что ось инерціи H_2 совпадаетъ съ линіею $\overline{r}$, а ось инерціи H_1 ей перпендикулярна. Тогда, обозначая черезъ α, β, γ углы главныхъ осей инерціи съ вертикальною осью вращенія, мы будемъ имѣть, считая направленіе оси вращенія по направленію тяжести:

$$\cos\alpha = \sin\chi\,, \qquad \cos\beta = \cos\chi\,, \qquad \cos\gamma = 0\,,$$

вслѣдствіе чего и на основаніи (291) заключаемъ, что направленіе момента Ω будетъ параллельно горизонтальной оси и равно

$$(H_1 - H_2)\,\omega^2 \sin\chi\cos\chi\,. \tag{399}$$

Моментъ центростремительной силы центра инерціи около той-же горизонтальной оси, являющійся отъ вращенія около вертикальной оси, будетъ очевидно

$$\omega^2 \overline{r}^2 \sin\chi\cos\chi\Sigma m\,. \tag{400}$$

Наконецъ, моментъ силы тяжести около горизонтальной оси будетъ

$$g\overline{r}\sin\chi\Sigma m\,, \tag{401}$$

гдѣ g есть ускореніе тяжести. Легко видѣть, что уголъ χ будетъ сохранять постоянную величину при постоянной угловой скорости ω, когда моментъ (401) будетъ равенъ суммѣ моментовъ (400) и (399), т- е. когда

$$(H_1 - H_2 + \overline{r}^2)\,\omega^2\cos\chi = g\overline{r}\Sigma m\,, \tag{402}$$

что и представляетъ искомое условіе.

Если въ началѣ вращенія линія $\overline{r}$ совпадаетъ съ осью вращенія, то всѣ три момента, (399), (400), (401), суть нули, и при дальнѣйшемъ вращеніи линія $\overline{r}$ остается неотклоненною. Но этого очевидно не будетъ въ общемъ случаѣ, когда ни одна изъ главныхъ осей инерціи не совпадаетъ съ линіею $\overline{r}$.

§ 51. Ударъ свободныхъ абсолютно твердыхъ тѣлъ.

Измѣненіе движенія тѣлъ послѣ ихъ удара другъ о друга должно очевидно обусловливаться только ихъ взаимною встрѣчею, не завися отъ дѣйствія какой-либо посторонней силы. Поэтому, разсматривая два или нѣсколько соударяющихся свободныхъ тѣлъ, какъ

одну систему движущихся матеріальныхъ массъ, мы должны прилагать къ этимъ тѣламъ всѣ тѣ заключенія, которыя были выведены въ § 21—§ 24, § 31, § 35 относительно общихъ свойствъ движенія свободной консервативной системы. Другими словами, мы должны прійти къ заключенію, что какъ во время удара, такъ до и послѣ него, останутся неизмѣнными слѣдующія величины: 1) геометрическая сумма количествъ движеній всѣхъ матеріальныхъ точекъ системы, или, что все равно, не измѣнится движеніе ея центра инерціи, 2) моментъ количества движеній, и 3) энергія системы. Эта неизмѣнность будетъ вообще имѣть мѣсто независимо отъ того, происходитъ-ли столкновеніе абсолютно твердыхъ тѣлъ, мягкихъ, упругихъ, или наконецъ жидкихъ и газообразныхъ. Разница будетъ только состоять въ способахъ вычисленія тѣхъ количествъ, которыя должны оставаться неизмѣнными: такъ, въ случаѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ, мы должны принимать во вниманіе только скорости поступательныхъ и вращательныхъ движеній, кромѣ которыхъ другихъ и быть не можетъ, по самому нашему опредѣленію таковыхъ тѣлъ; въ другихъ тѣлахъ, кромѣ упомянутыхъ скоростей, должны быть приняты въ разсчетъ скорости различныхъ частей одного и того же тѣла относительно другъ друга. Въ дѣйствительности конечно мы не имѣемъ дѣла съ абсолютно твердыми тѣлами, когда наблюдаемъ столкновеніе тѣлъ, отличаемыхъ названіемъ твердыхъ; но тѣмъ не менѣе изслѣдованіе идеальнаго случая абсолютной твердости имѣетъ физическое значеніе, какъ извѣстное приближеніе къ дѣйствительности, или какъ разборъ существенныхъ чертъ явленія, при чемъ второстепенныя качества предполагаются какъ-бы несуществующими. Подобное соображеніе мы должны имѣть въ виду при выводахъ всѣхъ нашихъ заключеній объ явленіяхъ природы, ибо вообще всѣ устанавливаемые нами законы природы суть наши идеальныя представленія, относящіяся не ко всей совокупности наблюденій и впечатлѣній, а только къ нѣкоторому идеальному ихъ распредѣленію.

Неизмѣнность трехъ упомянутыхъ величинъ, характеризуя вообще всякое дѣйствіе взаимныхъ силъ между массами системы, не относится слѣдовательно только исключительно къ случаю ударовъ. Поэтому мы должны разыскать еще спеціальныя условія, которыя отличили-бы случай ударовъ отъ общаго случая дѣйствія какихъ-либо взаимныхъ силъ. Во первыхъ изъ самаго опредѣленія удара слѣдуетъ, что измѣненіе движенія, обусловливаемое имъ въ каждомъ изъ соударяющихся тѣлъ,

происходитъ мгновенно въ моментъ соприкосновенія. Слѣдовательно дѣйствіе удара на каждое тѣло эквивалентно дѣйствію нѣкотораго импульса; величина и моментъ этого послѣдняго опредѣлятся очевидно приращеніями величины и момента количествъ движенія соотвѣтствующаго тѣла. Во вторыхъ, такъ какъ упомянутые импульсы должны обладать свойствами взаимныхъ силъ, то каждому импульсу (или вообще каждой его части), приложенному къ одной точкѣ, долженъ соотвѣтствовать равный и противоположный, приложенный къ другой точкѣ. Въ третьихъ, за точки приложенія импульсовъ мы должны очевидно принять точки соприкосновенія тѣлъ при ударѣ. Подъ соприкосновеніемъ тѣлъ въ данной точкѣ, т. е. подъ соприкосновеніемъ поверхностей ихъ ограничивающихъ, подразумѣвается совпаденіе въ упомянутой точкѣ элементовъ той и другой поверхности. Ударъ обусловливается сопротивленіемъ элемента одной поверхности перемѣщенію элемента другой по нормали къ первому элементу, направленной внутрь того тѣла, къ границѣ котораго этотъ элементъ принадлежитъ. Поэтому, въ четвертыхъ, мы должны предположить, что ударные импульсы, проходя черезъ точки соприкосновенія соударяющихся тѣлъ, направлены по внутреннимъ нормалямъ къ соотвѣтствующимъ поверхностямъ въ точкахъ соприкосновенія.

Вышеприведенныя разсужденія приложимъ къ случаю двухъ твердыхъ тѣлъ, соударяющихся въ одной точкѣ. Обозначимъ черезъ

M — массу перваго тѣла,

H_1, H_2, H_3 — величины главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи,

$\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, — слагающія скорости центра тяжести по главнымъ центральнымъ осямъ инерціи непосредственно до удара.

p, q, r, — слагающія угловыя скорости по тѣмъ-же осямъ до удара.

$\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1$ — скорости центра тяжести послѣ удара,

p_1, q_1, r_1 — угловыя скорости послѣ удара,

J — величину ударнаго импульса, приложеннаго въ точкѣ соприкосновенія и направленнаго по внутренной нормали къ поверхности тѣла,

l, m, n косинусы угловъ упомянутой нормали, а слѣдовательно и импульса, съ осями координатъ, т. е. съ главными осями инерціи перваго тѣла,

ξ, η, ζ — координаты точки соударенія относительно тѣхъ-же осей.

Затѣмъ помня, что величины слагающихъ импульса по какимъ либо направленіямъ измѣряютъ приращеніе слагающихъ по тѣмъ-же направленіямъ количества движенія, и что моменты импульса соотвѣтственно измѣряютъ приращеніе моментовъ количествъ движенія, мы будемъ имѣть:

$$Jl = M(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}), \quad Jm = M(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}), \quad Jn = M(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}), \tag{403}$$

$$\begin{aligned} J(m\zeta - n\eta) &= H_1(p_1 - p), \\ J(n\xi - l\zeta) &= H_2(q_1 - q), \\ J(l\eta - m\xi) &= H_3(r_1 - r). \end{aligned} \tag{404}$$

Соотвѣтствующія величины для втораго тѣла обозначимъ тѣми-же буквами со значками наверху: M_1', H', p'_1, p' и т. д., при чемъ осями координатъ будутъ главныя центральныя оси инерціи втораго тѣла; кромѣ того величина ударнаго импульса для втораго тѣла будетъ таже J, что для перваго, но направленная въ противоположную сторону, т. е. по внутренной нормали втораго тѣла, которая очевидно будетъ продолженіемъ нормали перваго тѣла, и, по отношенію къ этому послѣднему, будетъ внѣшнею. Такимъ образомъ мы получимъ для втораго тѣла:

$$Jl' = M'(\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}'), \quad Jm' = M'(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}'), \quad Jn' = M'(\mathfrak{w}_1' - \mathfrak{w}'), \tag{405}$$

$$\begin{aligned} J(m'\zeta' - n'\eta') &= H_1(p_1' - p'), \\ J(n'\xi' - l'\zeta') &= H_2(q_1' - q'), \\ J(l'\eta' - m'\xi') &= H_3(r_1' - r'). \end{aligned} \tag{406}$$

Уравненія (403)—(406), не опредѣляя еще вполнѣ движенія послѣ удара, позволяютъ сдѣлать нѣсколько общихъ выводовъ. Представимъ себѣ нѣкоторую прямую, перпендикулярную къ нормали (l, m, n); пусть λ, μ, ν будутъ косинусы угловъ этой линіи съ главными осями инерціи перваго тѣла, а λ', μ', ν'—углы той-же линіи съ осями инерціи втораго тѣла. Тогда по условію:

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \quad l'\lambda' + m'\mu' + n'\nu' = 0.$$

Умножая урр. (403) соотвѣтственно на λ, μ, ν и складывая, а урр. (405)—на λ', μ', ν' и тоже складывая, мы получимъ, помня вышеупомянутыя условія перпендикулярности:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}) + \mu(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}) + \nu(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}) &= 0, \\ \lambda'(\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}') + \mu'(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}') + \nu'(\mathfrak{w}_1' - \mathfrak{w}') &= 0, \end{aligned} \tag{407}$$

откуда видимъ, что проложеніе приращенія скорости центровъ инер-

ціи соударяющихся тѣлъ на линію, перпендикулярную къ общей нормали и стало-быть параллельную къ общей касательной плоскости, равно нулю; т. е. слагающія поступательныхъ скоростей, параллельныя общей касательной плоскости, отъ удара не мѣняются; слѣдовательно, ударъ измѣняетъ только скорости центровъ инерціи, перпендикулярныя къ упомянутой касательной плоскости.

Если нормаль въ точкѣ касанія проходитъ черезъ центръ инерціи ударяющагося тѣла, положимъ перваго, то очевидно:

$$\frac{\xi}{l}=\frac{\eta}{m}=\frac{\zeta}{n}\,,$$

вслѣдствіе чего лѣвыя части урр. (404) обращаются въ нули, и мы имѣемъ:

$$p_1=p\,,\qquad q_1=q\,,\qquad r_1=r\,;$$

т. е. въ такомъ случаѣ угловая скорость ударяющагося тѣла не измѣняется отъ удара. Тоже самое скажемъ и о второмъ тѣлѣ. Въ однородномъ шарѣ всякая нормаль направлена къ центру инерціи; слѣдовательно, при ударѣ однородныхъ шаровъ другъ о друга или о другія тѣла мѣняются только скорости ихъ центровъ, а вращенія остаются неизмѣнными.

Умножая урр. (404) соотвѣтственно на l, m, n и складывая, а урр. (406)—на l', m', n', мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} lH_1(p_1-p)+mH_2(q_1-q)+nH_3(r_1-r)&=0\,,\\ l'H_1'(p_1'-p')+m'H_2'(q_1'-q')+n'H_3'(r_1'-r')&=0\,,\end{aligned}\right\}\quad(407)'$$

откуда заключаемъ, что моменты количества движенія, зависящіе отъ вращательнаго движенія и прибавляющіеся послѣ удара къ соотвѣтственнымъ моментамъ того и другаго тѣла, параллельны общей касательной плоскости въ точкѣ соприкосновенія.

Приведенныя выше двѣнадцать уравненій, (403)—(406), содержатъ тринадцать неизвѣстныхъ: $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$, p_1, q_1, r_1, $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{v}_1'$, $\mathfrak{w}_1'$, p_1', q_1', r_1', J, для опредѣленія которыхъ мы должны прибавить тринадцатое уравненіе, выражающее неизмѣнность инергіи *), т. е.—одной только кинетической энергіи, ибо потенціальная энергія для твердыхъ тѣлъ, не дѣйствующихъ другъ на друга во все время движенія, равна по § 45 нулю. Припоминая выраженіе кинетической

*) Неизмѣнность количества движенія обоихъ тѣлъ и момента выражается, какъ легко видѣть, предыдущими уравненіями.

энергіи твердаго тѣла (225) и полагая приращеніе кинетической энергіи обоихъ тѣлъ равнымъ нулю, мы получаемъ:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} M\left\{(\mathfrak{u}_1^2 - \mathfrak{u}^2) + (\mathfrak{v}_1^2 - \mathfrak{v}^2) + (\mathfrak{w}_1^2 - \mathfrak{w}^2)\right\} \\
&+\frac{1}{2} H_1 (p_1^2 - p^2) + \frac{1}{2} H_2 (q_1^2 - q^2) + \frac{1}{2} H_3 (r_1^2 - r^2) \\
&+\frac{1}{2} M'\left\{(\mathfrak{u}_1'^2 - \mathfrak{u}'^2) + (\mathfrak{v}_1'^2 - \mathfrak{v}'^2) + (\mathfrak{w}_1'^2 - \mathfrak{w}'^2)\right\} \\
&+\frac{1}{2} H_1' (p_1'^2 - p'^2) + \frac{1}{2} H_2' (q_1'^2 - q'^2) + \frac{1}{2} H_3' (r_1'^2 - r'^2) = 0 .
\end{aligned} \tag{408}$$

Уравненію (408) можно дать еще другой видъ, выражая на основаніи (121)′ (§ 33) приращеніе кинетической энергіи съ помощію работы импульса. Такъ какъ импульсъ J приложенъ къ одной точкѣ, то суммованіе въ ур. (121)′ должно быть опущено. Называя черезъ u, v, w, u_1, v_1, w_1 слагающія скорости до и послѣ удара точки соприкосновенія перваго тѣла и черезъ тѣже буквы со значками— скорости точки соприкосновенія втораго тѣла, мы будемъ имѣть, опредѣливши по (121)′ работы импульса J, дѣйствующаго на первое тѣло, и такого-же импульса J, дѣйствующаго на второе тѣло:

$$\begin{aligned}
&J\left(l\frac{u_1+u}{2} + m\frac{v_1+v}{2} + n\frac{w_1+w}{2}\right) \\
&+J\left(l'\frac{u_1'+u'}{2} + m'\frac{v_1'+v'}{2} + n'\frac{w_1'+w'}{2}\right) = 0 ,
\end{aligned} \tag{409}$$

или такъ какъ на основаніи (198) (§ 45):

$$\begin{aligned}
u &= \mathfrak{u} + r\eta - q\zeta, \quad \text{и т. п.,} \\
u_1 &= \mathfrak{u}_1 + r_1\eta - q_1\zeta, \quad \text{и т. п.,} \\
u' &= \mathfrak{u}' + r'\eta' - q'\zeta', \quad \text{и т. п.,}
\end{aligned}$$

то уравненіе (409) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\begin{aligned}
&l[\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u} + \eta(r_1 + r) - \zeta(q_1 + q)] \\
&+m[\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v} + \zeta(p_1 + p) - \xi(r_1 + r)] \\
&+n[\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w} + \xi(q_1 + q) - \eta(p_1 + p)] \\
&+l'[\mathfrak{u}_1' + \mathfrak{u}' + \eta'(r_1' + r') - \zeta'(q_1' + q')] \\
&+m'[\mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}' + \zeta'(p_1' + p') - \xi'(r_1' + r')] \\
&+n'[\mathfrak{w}_1' + \mathfrak{w}' + \xi'(q_1' + q') - \eta'(p_1' + p')] = 0 \; {}^{*)} .
\end{aligned} \tag{410}$$

*) Уравненія (409) и (410) можно непосредственно получить изъ (408), на основаніи урр. (403)—(406).

Обозначая черезъ V и V_1, для перваго тѣла до и послѣ удара, проложенія скорости точки соприкосновенія на направленіе нормали къ поверхности тѣла въ той-же точкѣ, а черезъ V' и V_1'—подобныя-же скорости по тому-же самому направленію для втораго тѣла, мы будемъ имѣть:

$$lu + mv + nw = \pm V$$

$$l'u' + m'v' + n'w' = \mp V' \quad \text{и. т. д.},$$

вслѣдствіе чего ур. (410) дастъ:

$$V - V' = -(V_1 - V_1'), \tag{411}$$

откуда видимъ, что относительная скорость точекъ соприкосновенія по нормали сохраняетъ свою величину послѣ удара, но мѣняетъ при этомъ свой знакъ.

Если соударяющіяся матеріальныя системы не обладаютъ свойствами абсолютно твердыхъ тѣлъ, т. е. не представляются неизмѣняемыми, то вообще всѣ вышеприведенныя уравненія перестаютъ имѣть значеніе, ибо ими не будутъ уже выражаться законы сохраненія количества движенія, его момента и сохраненія энергіи; а движенія системъ не будутъ состоять только изъ поступательныхъ и вращательныхъ. Въ частныхъ случаяхъ однако нѣкоторыя изъ прежнихъ уравненій могутъ сохранять свои значенія.

Урр. (403) и соотвѣтственно (405) всегда будутъ имѣть значеніе, если подъ скоростями $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ и т. д. мы будемъ подразумѣвать строго скорости центра инерціи, а не той матеріальной точки, которая совпадала центромъ инерціи системы до удара. Оба упомянутыя понятія однозначны въ случаѣ неизмѣняемой системы, когда центръ инерціи не измѣняетъ своего положенія относительно различныхъ частей системы, но дѣлаются различными, когда части системы подвижны. Однако можетъ случиться, что послѣ перемѣщеній, вызванныхъ ударомъ, центръ инерціи претерпѣвшей ударъ системы не измѣнитъ своего положенія относительно ея частей. Тогда урр. (403) и (405) будутъ имѣть силу въ томъ-же значеніи, какъ для твердаго тѣла; т. е. скорости $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, и т. д. будутъ относиться къ одной и той-же матеріальной точкѣ системы до и послѣ удара.

Подобнымъ-же образомъ урр. (404) и (406) только тогда могутъ быть примѣнены къ тѣламъ, деформирующимся при ударѣ, когда

моментъ количествъ движеній, обусловливаемый всякими другими перемѣщеніями частей тѣлъ, кромѣ поступательныхъ и вращательныхъ, для каждаго тѣла опредѣлится равнымъ нулю до и послѣ удара.

Что касается до уравненія (408), то оно ни въ какомъ случаѣ не выразитъ неизмѣнность энергіи, если только послѣ удара будутъ имѣть мѣсто иныя новыя движенія, сверхъ поступательныхъ и вращательныхъ, ибо величина кинетической энергіи этихъ движеній, выражаясь суммою существенно положительныхъ членовъ, можетъ быть равна нулю и не имѣть вліянія въ ур. (408), только когда каждый членъ суммы равенъ нулю, т. е. когда каждая изъ лишнихъ скоростей каждой точки равна нулю. Итакъ, чтобы вычислить дѣйствительныя величины кинетической энергіи до и послѣ удара, нужно знать скорости частей ударяющихся тѣлъ относительно другъ друга для каждаго тѣла. Но вычислить упомянутыя относительныя скорости мы можемъ только тогда, когда намъ извѣстенъ вполнѣ механизмъ скрѣпленія частей даннаго тѣла другъ съ другомъ, что не всегда имѣетъ мѣсто. Тѣмъ не менѣе на основаніи нѣкоторыхъ опытовъ мы можемъ сдѣлать заключеніе, если не о механизмѣ строенія ударяющихся тѣлъ, то о соотношеніи между величинами ихъ видимой кинетической энергіи до и послѣ удара. Именно, еще Ньютонъ наблюдалъ измѣненіе скоростей при ударѣ тѣлъ неабсолютной твердости, и нашелъ, что относительныя скорости шаровъ изъ различнаго матеріала при центральномъ ударѣ не остаются однѣ и тѣже по величинѣ до и послѣ удара, но для шаровъ изъ одного и того-же матеріала сохраняютъ однако другъ къ другу постоянное отношеніе. Позднѣйшія наблюденія подтвердили это заключеніе Ньютона: такъ, для шаровъ изъ прессованой шерсти уменьшеніе величины относительной скорости послѣ удара найдено въ $\frac{5}{9}$ разъ, для желѣза— почти тоже самое, для стекла—въ $\frac{15}{16}$ разъ. Перенося упомянутое опытное заключеніе на относительныя скорости по нормалямъ точекъ соприкосновенія ударяющихся тѣлъ, и называя черезъ e коеффиціентъ уменьшенія этой скорости (коеффиціентъ возстановленія), при чемъ всегда $e < 1$, мы можемъ замѣнить для случая неабсолютно твердыхъ тѣлъ ур. (411) слѣдующимъ:

$$e(V - V') = -(V_1 - V_1'), \qquad (412)$$

вслѣдствіе чего урр. (409) и (410) должны быть измѣнены, и всѣ величины, которыя въ нихъ относятся ко времени до удара, должны

быть помножены на e; т. е. величины: $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \ldots p, q \ldots \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \ldots p', q'$ и т. д. должны быть замѣнены черезъ: $e\mathfrak{u}, e\mathfrak{v} \ldots ep, eq \ldots$ и т. д.

Если $e=0$, т. е. если слагающія скорости точекъ соприкосновенія по общей нормали дѣлаются послѣ удара одинаковыми, то тѣла называются абсолютно мягкими. Предположимъ, что два мягкія тѣла, столкнувшись, измѣнили свои прежнія поступательныя и угловыя скорости $\mathfrak{u} \ldots p \ldots \mathfrak{u}' \ldots p' \ldots$ на скорости $\mathfrak{u}_1 \ldots p_1 \ldots \mathfrak{u}_1' \ldots p_1' \ldots$; тогда, какъ выше сказано, соотношенія между скоростями до и послѣ удара опредѣляются урр. (403)—(406), и кромѣ того—слѣдующимъ уравненіемъ, которое получается введеніемъ въ ур. (410) множителя $e = 0$:

$$\begin{aligned} l(\mathfrak{u}_1 + \eta r_1 - \zeta q_1) + m(\mathfrak{v}_1 + \zeta p_1 - \xi r_1) \\ + n(\mathfrak{w}_1 + \xi q_1 - \eta p_1) \\ + l'(\mathfrak{u}_1' + \eta' r_1' - \zeta' q_1') + m'(\mathfrak{v}_1' + \zeta' p_1' - \xi' r_1') \\ + n'(\mathfrak{w}_1' + \xi' q_1' - \eta' p_1') = 0 . \end{aligned} \qquad (413)$$

Изъ тринадцати урр. (403)—(406), (413) опредѣлится, кромѣ двѣнадцати величинъ, относящихся къ скоростямъ, еще величина импульса J. Найдя эту послѣднюю величину, предположимъ, что на каждое изъ ударившихся тѣлъ непосредственно послѣ мягкаго удара подѣйствовалъ импульсъ eJ, приложенный къ ихъ соприкасающимся точкамъ также, какъ прежде J. Вслѣдствіе такого импульса скорости $\mathfrak{u}_1 \ldots p_1 \ldots \mathfrak{u}_1' \ldots p_1'$ обратятся въ $\mathfrak{u}_2 \ldots p_2 \ldots \mathfrak{u}_2' \ldots p_2' \ldots$, при чемъ, такъ какъ величины и моментъ импульса измѣряютъ величину и моментъ приращенія количества движенія, мы будемъ имѣть слѣдующія соотношенія между величинами $_1$ и $_2$:

$$\begin{aligned} eJl = M(\mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_1), \quad eJm = M(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1), \quad eJn = M(\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1), \\ eJ(m\zeta - n\eta) = H_1(p_2 - p_1), \\ eJ(n\xi - l\zeta) = H_2(q_2 - q_1), \\ eJ(l\eta - m\xi) = H_3(r_2 - r_1), \end{aligned} \qquad (414)$$

и подобныя-же уравненія для другаго тѣла. Складывая урр. (414) и имъ подобныя съ соотвѣтствующими урр. (403)—(406), мы находимъ:

$$\begin{aligned} (1+e)Jl = M(\mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}), \quad (1+e)Jm = M(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}), \\ (1+e)Jn = M(\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}), \\ (1+e)Jl\,(m\zeta - n\eta) = H_1(p_2 - p), \\ (1+e)Jm(n\xi - l\zeta) = H_2(q_2 - q), \\ (1+e)Jn\,(l\eta - m\xi) = H_3(r_2 - r), \end{aligned} \qquad (415)$$

и подобныя-же уравненія для втораго тѣла. Кромѣ того изъ тѣхъ-же урр. (414), (403)—(406) мы находимъ, что

$$\begin{aligned} &e(\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u})=\mathfrak{u}_2-\mathfrak{u}_1, \quad e(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v})=\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_1, \quad e(\mathfrak{w}_1-\mathfrak{w})=\mathfrak{w}_2-\mathfrak{w}_1, \\ &e(p_1-p)=p_2-p_1, \quad e(q_1-q)=q_2-q_1, \quad e(r_1-r)=r_2-r_1, \end{aligned} \tag{416}$$

и подобныя-же уравненія для втораго тѣла. Изъ урр. (416) и имъ подобныхъ мы получаемъ, на основаніи ур. (413), изъ котораго исключимъ всѣ величины со значками $_1$ внизу:

$$\begin{aligned} &l[\mathfrak{u}_2+e\mathfrak{u}+\eta(r_2+er)-\zeta(q_2+eq)] \\ &+m[\mathfrak{v}_2+e\mathfrak{v}+\zeta(p_2+ep)-\xi(r_2+er)] \\ &+n[\mathfrak{w}_2+n\mathfrak{w}+\xi(q_2+eq)-\eta(p_2+ep)] \\ &+l'[\mathfrak{u}_2'+e\mathfrak{u}'+\eta'(r_2'+er')-\zeta'(q_2'+eq')] \\ &+m'[\mathfrak{v}_2'+e\mathfrak{v}'+\zeta'(p_2'+ep')-\xi'(r_2'+er')] \\ &+n'[\mathfrak{w}_2'+e\mathfrak{w}'+\xi'(q_2'+eq')-\eta'(p_2'+ep')]=0. \end{aligned} \tag{417}$$

Уравненіе (417) есть ничто иное, какъ условіе (412), въ которомъ состоянію тѣлъ послѣ удара соотвѣтствуетъ теперь состояніе послѣ втораго импульса eJ. Другими словами, если-бы разсматриваемыя тѣла не были абсолютно мягкими, то послѣ удара другъ о друга они пріобрѣли-бы такія-же скорости, какія они пріобрѣтаютъ, будучи абсолютно мягкими, отъ совмѣстнаго дѣйствія удара и добавочнаго импульса eJ. Такимъ образомъ, дѣйствіе удара при столкновеніи неабсолютно твердыхъ тѣлъ мы можемъ представить себѣ распадающимся на два безконечно малые, непосредственно другъ за другомъ слѣдующіе періоды: въ первомъ періодѣ тѣла сдавливаютъ другъ друга съ силою импульса J; при этомъ очевидно они деформируются, и относительная скорость ихъ точекъ соприкосновенія уменьшается до нуля; въ результатѣ пріобрѣтается ими такое движеніе (или импульсъ къ такому движенію), какъ будто-бы они были абсолютно мягкими; но это пріобрѣтенное движеніе не остается за ними, а тотчасъ-же мѣняется во второмъ періодѣ удара, когда тѣла, возвращаясь къ своему прежнему виду подъ дѣйствіемъ упругихъ силъ, вызванныхъ деформаціею, продолжаютъ давить другъ на друга съ силою меньшаго импульса eJ, при чемъ относительная скорость ихъ точекъ соприкосновенія продолжаетъ убывать, принимая значенія меньшія нуля, т. е. иначе—возрастаетъ, перемѣнивши знакъ; это измѣненіе скорости продолжается до тѣхъ поръ, пока она не приметъ

величину e-кратную первоначальной скорости, но съ обратнымъ знакомъ. Въ частномъ случаѣ, когда $e=1$, тѣла давятъ другъ на друга также во второмъ періодѣ удара, какъ и въ первомъ, и ихъ точки соприкосновенія пріобрѣтаютъ наконецъ первоначальную относительную скорость, но только съ обратнымъ знакомъ. Такія тѣла называются абсолютно упругими и результатъ ихъ соударенія очевидно тотъ-же, какъ и абсолютно твердыхъ тѣлъ. Абсолютно упругія тѣла хотя и деформируются во время удара; но какъ до него, такъ и послѣ, точки ихъ не отличаются никакими иными скоростями кромѣ такихъ, какія свойственны абсолютно твердымъ тѣламъ; отсюда и тождество послѣдствій удара. Вообще какія-бы ни сталкивались системы и какими-бы скоростями ихъ матеріальныя точки не обладали, результатъ ихъ столкновенія будетъ очевидно тотъ-же самый, какъ абсолютно твердыхъ тѣлъ, если при ударѣ не измѣнится относительное движеніе точекъ каждаго тѣла отдѣльно, и ударный импульсъ будетъ имѣть вліяніе только на поступательныя и вращательныя движенія *). Въ иныхъ случаяхъ упомянутыя внутреннія движенія подлежатъ вычисленію и измѣренію, какъ напримѣръ, при относительномъ перемѣщеніи частей упругихъ или жидкихъ тѣлъ; въ другихъ случаяхъ не представляется достаточно данныхъ для ихъ опредѣленія; но тѣмъ не менѣе и тогда ихъ существованіе не подлежитъ сомнѣнію, если коеффиціентъ e при ударѣ отличенъ отъ единицы, ибо въ такомъ случаѣ существующая убыль кинетической энергіи видимаго движенія должна по закону сохраненія энергіи пополниться или кинетическою энергіею новаго какого-либо движенія, положимъ для насъ непосредственно и незамѣтнаго, или приращеніемъ потенціальной энергіи, которое опять впослѣдствіи можетъ превратиться въ кинетическую энергіею. Наблюдая, что при ударѣ неабсолютно твердыхъ и упругихъ тѣлъ убыль кинетической энергіи видимаго движенія всегда сопровождается ихъ нагрѣваніемъ, и притомъ—всег-

*) Нѣкоторые авторы, какъ Poisson и Poinsot, допуская возможность сохраненія абсолютной величины относительной скорости точекъ соприкосновенія только при ударѣ абсолютно упругихъ тѣлъ, считаютъ вопросъ объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ неопредѣленнымъ, ибо не обращаютъ вниманія на необходимость приложенія къ этому случаю закона сохраненія энергіи. Пока настоящее сочиненіе приготовлялось къ печати, въ Кіевскихъ Унив. Извѣстіяхъ (№ 1, № 3, 1883 г.) появились статьи Ф. и Н. Мацонъ, въ которыхъ высказываются тѣже, нѣсколько отличные отъ общепринятыхъ, взгляды на ударъ абсолютно твердыхъ тѣлъ, какъ и въ настоящемъ параграфѣ.

да въ опредѣленномъ отношеніи къ убыли энергіи, мы приходимъ къ заключенію объ эквиваленціи тепла и энергіи, къ представленію о тепловомъ состояніи, какъ о состояніи движенія, о чемъ будемъ имѣть случай при дальнѣйшемъ изложеніи говорить подробнѣе.

Ударъ твердаго тѣла объ абсолютно неподвижную поверхность представляетъ частный случай удара двухъ твердыхъ тѣлъ. Дѣйствительно, мы можемъ представить себѣ данную неподвижную поверхность, какъ границу нѣкотораго твердаго тѣла безконечно большой массы, которое до удара находится въ покоѣ и съ которымъ сталкивается другое тѣло конечной массы. Къ такому случаю будутъ приложимы урр. (403)—(406), въ которыхъ должно массу одного изъ тѣлъ, положимъ втораго, и слѣдовательно его моменты инерціи принять безконечно большими. Но размѣры втораго тѣла нѣтъ надобности при этомъ предполагать безконечными. Такъ какъ первое тѣло конечной массы получаетъ по предположенію конечныя измѣненія своей скорости, то величины импульса J и его момента должны остаться конечными. Слѣдовательно, дѣля правыя и лѣвыя части урр. (405), (406) соотвѣтственно на безконечно большія величины M', H_1', H_2', H_3', мы получимъ въ лѣвыхъ частяхъ безконечно малыя величины, и прійдемъ къ заключенію, что

$$\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}' = \mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}' = \mathfrak{w}_1' - \mathfrak{w}' = p_1' - p' = q_1' - q' = r_1' - r' = 0\,,$$

т. е. что, второе тѣло не измѣнитъ своего движенія, и останется въ покоѣ послѣ удара, если было въ таковомъ до удара. Слѣдовательно, если масса одного изъ сталкивающихся тѣлъ безконечно велика, то это тѣло, будучи неподвижно, производитъ во время удара дѣйствіе неизмѣняемой преграды. Такимъ образомъ, въ случаѣ удара твердаго тѣла о неподвижную поверхность семь подлежащихъ опредѣленію величинъ: $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$, p_1, q_1, r_1, J, найдутся изъ шести урр. (403) и (404), къ которымъ должно быть присоединено еще ур. (411), обращающееся при данномъ случаѣ, когда $V' = V_1' = 0$, въ

$$V = -V_1$$

или (418)

$$l(u + u_1) + m(v + v_1) + n(w + w_1) = 0\,,$$

откуда видимъ, что скорость точки соприкосновенія, перпендикулярная къ неподвижной поверхности, послѣ удара измѣняетъ свое на-

правленіе въ прямо противоположное, сохраняя прежнюю абсолютную величину.

Пусть SS будетъ слѣдъ элемента поверхности, о который ударяется тѣло (рис. 82), AB—направленіе и величина скорости точки соприкосновенія. Разлагая эту скорость на двѣ: нормальную AN и тангенціальную AT, и замѣчая, что по ур. (418) первая измѣнится послѣ удара въ прямо противоположную и равную AN_1, а вторая останется прежнею, мы получимъ величину и направленіе скорости точки соприкосновенія послѣ удара, представленную линіей AB_1, лежащею въ одной плоскости съ нормалью N_1N, при чемъ уголъ N_1AB_1 равенъ углу NAB.

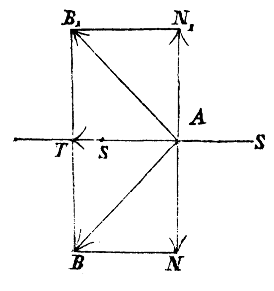


Рис. 82.

Если нормаль въ точкѣ касанія проходитъ черезъ центръ инерціи ударяющагося тѣла, то уравн. (418) имѣетъ также мѣсто и для скорости центра инерціи, которая представляетъ собою въ тоже время поступательную скорость точекъ тѣла. Слѣдовательно, въ такомъ случаѣ мы приходимъ тоже къ заключенію, что поступательныя скорости до и послѣ удара будутъ лежать въ одной плоскости съ нормалью и образовать равные углы съ обоими противоположными другъ другу направленіями по этой послѣдней. Плоскости, въ которыхъ лежатъ скорости до и послѣ удара, и нормаль, называются плоскостями паденія и отраженія; соотвѣтственные углы съ нормалью—углами паденія и отраженія. Итакъ, для точки соприкосновенія всегда плоскости паденія и отраженія совпадаютъ другъ съ другомъ, а углы паденія и отраженія равны другъ другу. Для поступательныхъ скоростей тотъ-же самый законъ будетъ имѣть мѣсто, только когда нормаль проходитъ черезъ центръ инерціи; но при этомъ плоскость отраженія поступательной скорости вообще конечно не совпадетъ съ плоскостію отраженія скорости точки касанія.

Въ случаѣ неабсолютно упругаго тѣла $\overline{AN_1} = e\overline{AN}$ (рис. 82); но такъ какъ все таки $\overline{N_1B_1} = \overline{NB}$, то

$$\frac{\operatorname{tg} NAB}{\operatorname{tg} N_1AB_1} = \frac{NB}{NA} : \frac{N_1B_1}{N_1A} = \frac{1}{e}; \tag{419}$$

т. е. въ такомъ случаѣ плоскости паденія и отраженія совпадаютъ, и тангенсы угловъ паденія и отраженія находятся въ постоянномъ отношеніи.

Наконецъ легко видѣть, что при ударѣ абсолютно твердаго тѣла о неизмѣнную поверхность его кинетическая энергія не измѣняется, ибо работа импульса J равна нулю, какъ это видно изъ втораго ур. (418), котораго лѣвая часть, умноженная на $\frac{1}{2} J$, представляетъ работу импульса. Величина геометрической суммы количествъ движенія и ихъ моментъ очевидно въ данномъ случаѣ получаютъ приращенія, слагающія которыхъ и опредѣляются непосредственно уравненіями (403), (404). Наоборотъ урр. (403), (404), (418) могутъ быть выведены непосредственно, независимо отъ рѣшенія вопроса объ ударѣ двухъ тѣлъ, если мы обратимъ вниманіе на то, что неизмѣнная поверхность должна представлять сопротивленіе всякой силѣ дѣйствующей къ ней перпендикулярно, и что ударъ не измѣняетъ энергію системы.

Для примѣра вычислимъ скорости послѣ удара въ томъ случаѣ, когда нормаль въ точкѣ соприкосновенія двухъ соударяющихся тѣлъ проходитъ черезъ ихъ центры инерціи. Выберемъ координаты такъ, чтобы одна изъ осей, положимъ ось x-овъ, совпадала съ нормалью въ точкѣ соприкосновенія. Эти оси вообще не будутъ параллельны главнымъ центральнымъ осямъ инерціи того или другаго тѣла; но въ случаѣ однородныхъ шаровъ, такая параллельность будетъ всегда имѣть мѣсто, ибо для однороднаго шара моменты инерціи одинаковы относительно всѣхъ осей проходящихъ черезъ его центръ. Кромѣ того пусть обѣ системы координатъ, къ которымъ относятся урр. (403)—(406), будутъ параллельны другъ другу, и ось x-овъ одной системы служитъ продолженіемъ той-же оси другой. Въ такомъ случаѣ мы должны въ упомянутыхъ уравненіяхъ принять:

$$l = 1\,,\quad m = n = m' = n' = 0\,,\quad l' = -1\,,\quad \eta = \zeta = \eta' = \zeta' = 0\,,$$

вслѣдствіе чего получаемъ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v} = \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w} = p_1 - p = q_1 - q = r_1 - r = 0\,, \\ \mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}' = \mathfrak{w}_1' - \mathfrak{w}' = p_1' - p' = q_1' - q' = r_1' - r' = 0\,, \end{aligned} \tag{420}$$

т. е. извѣстный уже результатъ, что угловыя скорости и поступательныя скорости, перпендикулярныя къ нормали, не измѣняются ударомъ. Кромѣ того первыя изъ урр. (403) и (405) дадутъ:

$$M(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}) = -M'(\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}')\,, \tag{421}$$

а ур. (412) дастъ:

$$e(\mathfrak{u}-\mathfrak{u}') = -(\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_1'). \tag{422}$$

Изъ этихъ двухъ уравненій получаемъ:

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{M\mathfrak{u}+M'\mathfrak{u}'-eM'(\mathfrak{u}-\mathfrak{u}')}{M+M'},$$
$$\mathfrak{u}_1' = \frac{M'\mathfrak{u}'+M\mathfrak{u}-eM(\mathfrak{u}'-\mathfrak{u})}{M+M'}. \tag{423}$$

Если $M=M'$, и $e=1$, то

$$\mathfrak{u}_1=\mathfrak{u}', \quad \mathfrak{u}_1'=\mathfrak{u}; \tag{424}$$

т. е. тѣла обмѣниваются своими скоростями.

Полныя результирующія скорости послѣ удара мы найдемъ, складывая найденныя въ урр. (423) съ оставшимися неизмѣнными скоростями $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, для одного тѣла, и $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$, для другаго.

Обратимся теперь къ случаю, когда сталкиваются нѣсколько тѣлъ, при чемъ каждыя два тѣла ударяются другъ о друга вообще нѣсколькими точками. Тогда на каждое изъ тѣлъ будетъ дѣйствовать во время удара столько различныхъ импульсовъ, сколько есть точекъ, которыми это тѣло соприкасается съ другими. Число различныхъ импульсовъ, дѣйствующихъ на всѣ тѣла, будетъ равно удвоенному числу всѣхъ общихъ точекъ соприкосновенія, при чемъ эти импульсы будутъ попарно равны и противоположны другъ другу, направляясь по нормалямъ въ точкахъ соприкосновенія. Такимъ образомъ, выбирая для каждаго тѣла оси координатъ по главнымъ центральнымъ осямъ инерціи, мы будемъ прежде всего имѣть для каждаго тѣла слѣдующія уравненія, подобныя (403) и (404):

$$\Sigma Jl = M(\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}), \quad \Sigma Jm = M(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}), \quad \Sigma Jn = M(\mathfrak{w}_1-\mathfrak{w}) \tag{425}$$

$$\Sigma J(m\zeta-n\eta) = H_1(p_1-p),$$
$$\Sigma J(n\xi-l\zeta) = H_2(q_1-q), \tag{426}$$
$$\Sigma J(l\eta-m\xi) = H_3(r_1-r),$$

при чемъ суммы берутся по различнымъ точкамъ соприкосновенія тѣла съ другими тѣлами, и, для каждаго члена суммы, будутъ соотвѣтственно различны величины импульсовъ, координатъ точки сопри-

косновенія и косинусовъ угловъ нормали съ осями координатъ. Въ каждую изъ такихъ системъ шести уравненій, кромѣ шести соотвѣтствующихъ неизвѣстныхъ $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ p_1, q_1, r_1, войдутъ еще неизвѣстные импульсы, которые останутся во всѣхъ системахъ уравненій неопредѣленными, и могутъ быть произвольными, въ числѣ, равномъ количеству общихъ точекъ соприкосновеніи соударяющихся другъ съ другомъ тѣлъ. Но на основаніи закона сохраненія энергіи работа всѣхъ импульсовъ должна быть равна нулю, ибо импульсы, какой-бы величины они ни были, попарно равны и противоположны другъ другу; поэтому мы будемъ имѣть еще условіе, подобное (409):

$$\sum J\left\{l(u_1+u)+l'(u_1'+u')+m(v_1+v)+m'(v_1'+v')\right.$$
$$\left.+n(w_1+w)+n'(w_1'+w)\right\}=0, \qquad (427)$$

или

$$\Sigma J(V-V'+V_1-V_1')=0,$$

гдѣ каждый членъ суммы относится къ соотвѣтствующей точкѣ соприкосновенія двухъ тѣлъ. Для различныхъ точекъ соприкосновенія величины, входящія подъ знакъ суммы въ лѣвой части ур. (427), будутъ вообще различны независимо отъ того, принадлежатъ-ли различныя точки соприкосновенія, къ которымъ эти члены относятся, одной и той-же парѣ тѣлъ, или разнымъ парамъ. Такъ какъ условіе (427) должно удовлетворяться, какія-бы ни были величины различныхъ импульсовъ, то мы заключаемъ, что множители при различныхъ произвольныхъ пока величинахъ J должны независимо другъ отъ друга обращаться въ нули, вслѣдствіе чего получаемъ рядъ уравненій вида

$$V-V'=-(V_1-V_1'), \qquad (428)$$

число которыхъ будетъ равно числу точекъ соприкосновенія, т. е. числу оставшихся неопредѣленными величинъ импульсовъ. Такимъ образомъ, системы уравненій, вида (425), (426), (428), опредѣлятъ всѣ неизвѣстныя величины, необходимыя для рѣшенія разбираемаго вопроса.

Къ тому-же результату мы прійдемъ, если примемъ, что всѣ удары совершаются не одновременно, но въ безконечно быстрой послѣдовательности, одинъ за другимъ, черезъ безконечно малые прометутки времени. Такъ, мы предположимъ, что первое тѣло сперва ударяется одною своею точкою объ одно тѣло; затѣмъ дру-

гою—о другое тѣло, или о тоже самое; затѣмъ послѣдовательно объ остальныя; наконецъ, можетъ быть снова нѣсколько разъ—о тѣже самыя тѣла, въ прежнемъ или иномъ какомъ порядкѣ, и такъ далѣе; тоже самое относительно другихъ тѣлъ до тѣхъ поръ, пока они пріобрѣтутъ окончательныя скорости, обусловливающія разъединеніе соприкасавшихся элементовъ. Въ такомъ случаѣ очевидно, каждый изъ импульсовъ J будетъ слагаться изъ опредѣленнаго числа меньшихъ импульсовъ по тому-же самому направленію, и въ наши уравненія войдетъ такое-же число отдѣльныхъ неизвѣстныхъ суммъ, сколько прежде было неизвѣстныхъ импульсовъ J; но очевидно также, что ни одно изъ отдѣльныхъ слагаемыхъ каждой суммы не явится въ упомянутыхъ уравненіяхъ множителемъ или дѣлителемъ врознь отъ другихъ слагаемыхъ той-же суммы; слѣдовательно, введеніемъ бо́льшаго числа послѣдовательныхъ импульсовъ число неизвѣстныхъ, подлежащихъ исключенію изъ нашихъ уравненій для опредѣленія искомыхъ окончательныхъ скоростей, не увеличится, ибо исключаться будутъ не отдѣльные вновь введенные импульсы, но ихъ суммы, въ числѣ равномъ количеству общихъ точекъ соприкосновенія.

Для примѣра представимъ себѣ рядъ тѣлъ, центры инерціи которыхъ расположены на одной прямой, и притомъ такъ, что эта прямая совпадаетъ со всѣми нормалями въ точкахъ соприкосновенія упомянутыхъ тѣлъ. Пусть два крайнія тѣла ряда обладаютъ поступательными скоростями $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{u}^{(n)}$; а промежуточныя $n-1$ тѣлъ до удара находятся въ покоѣ, или вообще обладаютъ поступательными скоростями, перпендикулярными къ общей нормали, и угловыми скоростями, при чемъ скорости того и другаго рода отъ удара не измѣняется. Если выберемъ оси координатъ, какъ въ первомъ примѣрѣ, то импульсы, дѣйствующіе на наши тѣла, должны быть обозначены слѣдующимъ образомъ: на первое тѣло: J', на второе: J', J'', на третье: J'', J''', и т. д. на предпослѣднее: $J^{(n-1)}$, $J^{(n)}$ и на послѣднее: $J^{(n)}$. Затѣмъ урр. (425) и имъ подобныя дадутъ:

$$\begin{aligned} &J' = M(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}), \quad J'' - J' = N'\mathfrak{u}_1', \quad J''' - J'' = M''\mathfrak{u}_1'' \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots J^{(n)} - J^{(n-1)} = M^{(n-1)}\mathfrak{u}^{(n-1)}, \quad -J^{(n)} = M^{(n)}(\mathfrak{u}_1^{(n)} - \mathfrak{u}^{(n)}). \end{aligned} \qquad (429)$$

Точно также изъ урр. (428) и подобныхъ имъ получимъ:

$$-e(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}') = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_1', \qquad -e(\mathfrak{u}' - \mathfrak{u}'') = \mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}_1'',$$

$$-e(\mathfrak{u}''' - \mathfrak{u}'') = \mathfrak{u}_1'' - \mathfrak{u}_1''', \qquad -e(\mathfrak{u}^{(n-1)} - \mathfrak{u}^{(n)}) = \mathfrak{u}_1^{(n-1)} - \mathfrak{u}_1^{(n)},$$

и такъ какъ

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'' = \mathfrak{u}''' = \mathfrak{u}^{(n-1)} = 0\,,$$

то

$$\begin{gathered} -e\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_1'\,, \quad \mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}_1'' = 0\,, \quad \mathfrak{u}_1'' - \mathfrak{u}_1''' = 0 \ldots \\ \mathfrak{u}_1^{(n-2)} - \mathfrak{u}_1^{(n-1)} = 0\,, \quad e\mathfrak{u}^{(n)} = \mathfrak{u}_1^{(n-1)} - \mathfrak{u}_1^{(n)}; \end{gathered} \tag{430}$$

складывая уравненія (430), получаемъ:

$$-e(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}^{(n)}) = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_1^{(n)}\,. \tag{431}$$

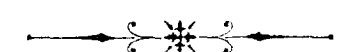
Кромѣ того изъ тѣхъ-же урр. (430), легко находимъ, что

$$\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{u}_1'' = \cdot \cdot \cdot = \mathfrak{u}_1^{(n-1)} = 0\,,$$

вслѣдствіе чего урр. (429) даютъ:

$$M(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}) = -M^{(n)}(\mathfrak{u}_1^{(n)} - \mathfrak{u}^{(n)})\,. \tag{432}$$

Сравнивая урр. (432), (431) съ урр. (421), (422), мы заключаемъ, что два крайнія тѣла пріобрѣтаютъ отъ удара такія-же скорости, какъ если-бы соприкасались другъ съ другомъ непосредственно; скорости-же промежуточныхъ тѣлъ остаются безъ измѣненія.



Въ заключеніе перейдемъ къ случаю, когда тѣла при ударѣ соприкасаются не отдѣльными точками, но плоскостями конечныхъ размѣровъ. При этомъ вопросъ не потеряетъ своей общности если мы остановимся на случаѣ удара двухъ тѣлъ, соприкасающихся одною плоскостію.

Прежде всего докажемъ, что если относительныя нормальныя скорости трехъ паръ совпадающихъ при ударѣ точекъ двухъ тѣлъ, не измѣняютъ своей величины, мѣняя только свой знакъ, то тѣмъ-же самымъ свойствомъ обладаютъ нормальныя скорости въ каждой точкѣ неопредѣленно ограниченной плоскости, проведенной черезъ упомянутыя три точки, которыя вообще не лежатъ на одной прямой. Для простоты выберемъ оси координатъ такъ, чтобы ось x-овъ была перпендикулярна къ плоскости трехъ точекъ, а другія двѣ оси лежали въ этой плоскости; скорости $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, p, p' и т. д. будемъ относить къ этимъ новымъ координатамъ. Начало координатъ примемъ въ одной изъ трехъ точекъ и координаты двухъ другихъ обозначимъ черезъ 0, η_1, ζ_1 и 0, η_2, ζ_2. Тогда три уравненія, вида (428), для

упомянутыхъ точекъ примутъ форму:

$$u - u' = -(u_1 - u_1'),$$
$$u - u' + \eta_1(r - r') - \zeta_1(q - q') = -[u_1 - u_1' + \eta_1(r_1 - r_1') - \zeta_1(q_1 - q_1')],$$
$$u - u' + \eta_2(r - r') - \zeta_1(q - q') = -[u_1 - u_1' + \eta_2(r_1 - r_1') - \zeta_2(q_1 - q_1')],$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{aligned} \eta_1(r - r' + r_1 - r_1') - \zeta_1(q - q' + q_1 - q_1') = 0\,, \\ \eta_2(r - r' + r_1 - r_1') - \zeta_2(q - q' + q_1 - q_1') = 0\,, \end{aligned} \qquad (433)$$

и слѣдовательно:

$$r' - r' + r_1 - r_1' = 0\,, \quad q - q' + q_1 - q_1' = 0\,, \qquad (434)$$

если только нѣтъ условія, что

$$\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2 = 0\,, \quad \text{т. е.} \ \frac{\eta_1}{\zeta_1} = \frac{\eta_2}{\zeta_2}\,,$$

которое можетъ имѣть мѣсто, когда двѣ точки (1) и (2) лежатъ на одной прямой, проходящей черезъ начало координатъ; а такой случай исключенъ нами выше. Но если равенства (434) такимъ образомъ должны существовать, то урр. (433) и имъ предыдущія удовлетворятся всякими произвольно выбранными величинами координатъ η и ζ, т. е. будутъ имѣть силу для всѣхъ точекъ плоскости, проходящей черезъ три точки соприкосновенія, и притомъ не зависимо отъ того, будетъ-ли эта плоскость дѣйствительно всѣми своими точками принадлежать заразъ тому и другому тѣлу, или будетъ представлять собою геометрическое мѣсто воображаемыхъ совпадающихъ точекъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣмъ и другимъ тѣломъ, безъ измѣненія массъ и моментовъ инерціи этихъ послѣднихъ. Слѣдовательно вообще, если въ одной ограниченной части какой либо общей плоскости двухъ соударяющихся тѣлъ величина относительныхъ скоростей по нормали сохраняется съ измѣненіемъ знака, то тѣмъ-же самымъ свойствомъ обладаютъ всѣ остальныя матеріальныя, или воображаемыя, точки той-же плоскости.

Изъ вышесказаннаго очевидно, что, въ случаѣ соприкосновенія соударяющихся тѣлъ плоскими частями ихъ поверхности, мы можемъ выбрать любыя три точки въ плоскости соприкосновенія, не лежащія на одной прямой, и рѣшать вопросъ о соудареніи въ этихъ трехъ точкахъ, ибо три импульса перпендикулярные къ данной плоскости мы всегда можемъ замѣнить имъ эквивалентными импульсами, перпендикулярными къ тойже плоскости, при чемъ относительныя скорости точекъ приложенія каждой изъ трехъ паръ новыхъ импульсовъ будутъ слѣдовать тому-

же закону, какъ точки приложенія прежнихъ импульсовъ. Тоже самое является болѣе очевиднымъ изъ слѣдующихъ непосредственныхъ разсужденій.

Въ данномъ случаѣ мы должны предполагать, что равные и взаимно противоположные ударные импульсы приложены къ каждой точкѣ плоскости соприкосновенія, вслѣдствіе чего урр. (425) и (426) представятся въ слѣдующей формѣ:

$$l\Sigma J = M(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}), \quad m\Sigma J = M(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}), \quad n\Sigma J = M(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}), \tag{435}$$

$$\begin{aligned} m\Sigma J\zeta - n\Sigma J\eta &= H_1(p_1 - p), \\ n\Sigma J\xi - l\Sigma J\zeta &= H_2(q_1 - q), \\ l\Sigma J\eta - m\Sigma J\xi &= H_3(r_1 - r), \end{aligned} \tag{436}$$

и подобныя-же уравненія для втораго тѣла—въ формѣ:

$$l\Sigma J = M'(\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}'), \quad m'\Sigma J = M'(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}'), \quad n'\Sigma J = M'(\mathfrak{w}_1' - \mathfrak{w}'), \tag{437}$$

$$\begin{aligned} m'\Sigma J\zeta' - n'\Sigma J\eta' &= H_1'(p_1' - p'), \\ n'\Sigma J\xi' - l'\Sigma J\zeta' &= H_2'(q_1' - q'), \\ l'\Sigma J\eta' - m'\Sigma J\xi' &= H_3'(r_1' - r'), \end{aligned} \tag{438}$$

гдѣ суммы берутся по всѣмъ точкамъ соприкосноненія, координаты которыхъ взяты по одной или другой изъ двухъ системъ. Въ приведенныхъ уравненіяхъ, кромѣ двѣнадцати послѣударныхъ искомыхъ скоростей, заключаются еще неизвѣстныя величины:

$$\Sigma J, \quad \Sigma J\xi, \quad \Sigma J\eta, \quad \Sigma J\zeta, \quad \Sigma J\xi', \quad \Sigma J\eta', \quad \Sigma J\zeta', \tag{438$'$}$$

при чемъ шесть послѣднихъ изъ нихъ связаны между собою тремя уравненіями, вытекающими изъ того геометрическаго соображенія, что точки, по которымъ берутся суммы для перваго и втораго тѣла, принадлежатъ одной и той-же плоскости, но даются координатами по двумъ разнымъ системамъ, положеніе которыхъ относительно другъ друга должно быть дано. Поэтому, обозначая косинусы угловъ между осями обѣихъ системъ по ниже слѣдующей таблицѣ

	ξ	η	ζ
ξ'	a_1	a_2	a_3
η'	b_1	b_2	b_3
ζ'	c_1	c_2	c_3

и обозначая координаты центра инерціи перваго тѣла, относительно

центральныхъ осей инерціи втораго, черезъ $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\xi' &= \overline{x} + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta\,,\\ \eta' &= \overline{y} + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta\,,\\ \zeta' &= \overline{z} + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta\,,\end{aligned} \tag{439}$$

откуда

$$\begin{aligned}\Sigma J\xi' &= \overline{x}\Sigma J + a_1\Sigma J\xi + a_2\Sigma J\eta + a_3\Sigma J\zeta\,,\\ \Sigma J\eta' &= \overline{y}\Sigma J + b_1\Sigma J\xi + b_2\Sigma J\eta + b_3\Sigma J\zeta\,,\\ \Sigma J\zeta' &= \overline{z}\Sigma J + c_1\Sigma J\xi + c_2\Sigma J\eta + c_3\Sigma J\zeta\,.\end{aligned} \tag{440}$$

Къ системѣ уравненій (435)—(438) должно быть еще прибавлено условіе, что, для каждой точки (ξ, η, ζ) плоскости соприкосновенія, относительныя скорости того и другаго тѣла по нормали будутъ сохранять свою величину до и послѣ удара, мѣняя знакъ. Это условіе представляется уравненіемъ (410), въ которомъ координаты ξ, η, ζ и выраженныя черезъ нихъ съ помощію (439) координаты ξ', η', ζ' будутъ принадлежать любой точкѣ плоскости соприкосновенія. Написавши условіе (410) въ видѣ,

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0\,, \tag{441}$$

гдѣ на основаніи (439):

$$\begin{aligned}
A &= n(q_1+q) - m(r_1+r)\\
&+ l'[b_1(r_1'+r) - c_1(q_1'+q')] + m'[c_1(p_1'+p') - a_1(r_1'+r')]\\
&+ n'[a_1(q_1'+q') - b_1(p_1'+p')]\,,\\
B &= l(r_1+r) - n(p_1+p)\\
&+ l'[b_2(r_1'+r') - c_2(q_1'+q')] + m'[c_2(p_1'+p') - a_2(r_1'+r')]\\
&+ n'[a_2(q_1'+q') - b_2(p_1'+p')]\,,\\
C &= m(p_1+p) - l(q_1+q)\\
&+ l'[b_3(r_1'+r') - c_3(q_1'+q')] + m'[c_3(p_1'+p') - a_3(r_1'+r')]\\
&+ n'[a_3(q_1'+q') - b_3(p_1'+p')]\,,\\
D &= l(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}) + m(\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}) + n(\mathfrak{w}_1+\mathfrak{w})\\
&+ l'[\mathfrak{u}_1'+\mathfrak{u}'+\overline{y}(r_1'+r') - \overline{z}(q_1'+q)]\\
&+ m'[\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}'+\overline{z}(p_1'+p') - \overline{x}(r_1'+r)]\\
&+ n'[\mathfrak{w}_1'+\mathfrak{w}'+\overline{x}(q_1'+q') - \overline{y}(p_1'+p')]\,,
\end{aligned} \tag{442}$$

и замѣчая, что координаты ξ, η, ζ, кромѣ условія (441), должны удовлетворять уравненію плоскости соприкосновенія:

$$l\xi + m\eta + n\zeta = h\,, \tag{443}$$

гдѣ h есть разстояніе этой плоскости отъ начала координатъ (сравн. (115), § 43), мы находимъ, помножая ур. (443) на неопредѣленный множитель λ и складывая его съ ур. (441), что въ получаемомъ такимъ образомъ уравненіи,

$$(A + \lambda l)\,\xi + (B + \lambda m)\,\eta + (C + \lambda n)\,\zeta + D - \lambda h = 0\,, \tag{444}$$

мы можемъ разсматривать, вслѣдствіе неопредѣленности λ, величины ξ, η и ζ, какъ совершенно произвольныя. Поэтому ур. (444) должно распадаться на четыре слѣдующія:

$$A + \lambda l = 0\,, \quad B + \lambda m = 0\,, \quad C + \lambda n = 0\,, \quad D - \lambda h = 0\,. \tag{445}$$

Кромѣ того, на основаніи (443), имѣемъ еще:

$$l\Sigma J\xi + \Sigma mJ\eta + n\Sigma J\zeta = h\Sigma J\,. \tag{446}$$

Восемь уравненій (440), (445), (446), вмѣстѣ съ двѣнадцатью уравненіями (435)—(438), вполнѣ достаточны для опредѣленія двѣнадцати искомыхъ послѣударныхъ скоростей, семи суммъ (438)′ и множителя λ.

Найдя суммы (438)′, мы можемъ задаться вопросомъ о нахожденіи распредѣленія импульсовъ по элементамъ плоскости соприкосновенія. Рѣшеніе этого вопроса совершенно тождественно съ вопросомъ о распредѣленіи давленій, разобраннымъ въ § 43; поэтому мы здѣсь не будемъ на немъ останавливаться.